METRON

RIVISTA INTERNAZIONALE DI STATISTICA — REVUE INTERNATIONALE DE STATISTIQUE
INTERNATIONAL REVIEW OF STATISTICS — INTERNATIONALE STATISTISCHE ZEITSCHRIFT

DIRETTORE PROPRIETARIO — DIRECTEUR ET PROPRIÉTAIRE
EDITOR AND PROPRIETOR — HERAUSGEBER UND EIGENTHÜMER

Prof. Dott. Corrado Gini, *direttore dell'Istituto di Statistica della R. Università di Roma, presidente dell'Istituto Centrale di Statistica del Regno d'Italia.*

COMITATO DIRETTIVO — COMITÉ DE DIRECTION
EDITORIAL COMMITTEE — DIREKTION-KOMITEE

Prof. A. Andréadès, *de Science des finances à l'Université d'Athènes* (Grèce).
Prof. A. E. Bunge, *director general de Estadística de la Nación, Buenos Aires* (Argentina).
Prof. F. P. Cantelli, *professore di Matematica Attuariale nel R. Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Napoli* (Italia).
Prof. C. V. L. Charlier, *professor der Astronomie an der Universität Lund* (Schweden).
Prof. F. von Fellner, *o. off. Universitäts-Professor in Budapest* (Ungarn).
Prof. A. Flores de Lemus, *jefe de Estadística del Ministerio de Hacienda, Madrid* (España).
Prof. M. Greenwood, *professor of Epidemiology and Vital Statistics in the University of London* (England).
Ing. L. March, *directeur honoraire de la Statistique générale de la France, Paris* (France).
Prof. H. W. Methorst, *directeur de l'Office permanent de l'Institut International de Statistique et du Bureau central de Statistique, La Haye* (Pays-Bas).
Prof. A. Julin, *secrétaire général du Ministère de l'Industrie et du Travail, Bruxelles* (Belgique).
Prof. R. Pearl, *director of the Institute for Biological Research at the J. Hopkins University, Baltimore* (U. S. A.).
Prof. H. Westergaard, *professor in the University of Copenhagen* (Denmark).

AMMINISTRATORE — ADMINISTRATEUR — MANAGER — VERWALTER

Dott. Silvio Orlandi, *Istituto di Statistica e Politica Economica della R. Università di Roma.*

SEGRETARI DI REDAZIONE — SECRÉTAIRES DE RÉDACTION
EDITORIAL SECRETARIES — REDACTIONSSECRETAERE

Prof. Luigi Galvani — Dott. Mario Saibante

Vol. VIII - N. 4. **15-VI-1930.**

SOMMARIO — SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

M. Fréchet. *Sur la convergence « en probabilité »* . . . . . Pag. 3
J. O. Irwin, M. A., M. Sc. *On the frequency distribution of the means of samples from populations of certain Pearson's types* . . . . . » 51
L. I. Dublin and **A. J. Lotka.** *The True Rate of Natural Increase of the Population of the United States. Revision on Basis of Recent Data.* » 107
P. D. Rediadis. *The Greek National Income and Wealth in* 1929 . . . . » 121
Bibliografia . . . . . » 143

ROMA
AMMINISTRAZIONE DEL « METRON »
R. UNIVERSITÀ — ISTITUTO DI STATISTICA

ARTICOLI GIUNTI ALLA RIVISTA CHE VERRANNO PUBBLICATI NEI PROSSIMI NUMERI.

(*Secondo l'ordine d'arrivo*)

ARTIKEL, DIE AN DIE ZEITSCHRIFT ANGELANGT SIND UND WELCHE IN DEN NACHFOLGENDEN NUMMERN ERSCHEINEN WERDEN.

(*Nach der Reihenfolge des Eingangs*)

ARTICLES REÇUS PAR LA REVUE ET À PARAÎTRE PROCHAINEMENT.

(*D'après la date de réception*)

ARTICLES RECEIVED BY THE REVIEW WHICH WILL BE PUBLISHEED IN FUTURES ISSUES.

(*According to date of receipt*)

F. Savorgnan. *La Fecondità delle Aristocrazie.*

A. Andréadès. *La mort de Sparte et ses causes démographiques.*

L. Galvani. *Contributi alla determinazione dell'indice di variabilità per alcuni tipi di distribuzione.*

Gli Autori degli articoli inviati per la pubblicazione nella Rivista, rinunciano in favore della medesima alla proprietà letteraria degli articoli stessi, qualora vengano pubblicati.

The Authors of papers sent for publication in the Review are supposed to give up their copyright in favour of the Review if the papers are published.

Les Auteurs des articles envoyés à la Revue pour y être publiés, renoncent, en faveur de celle-ci, à la propriété littéraire de leurs articles, s'ils sont acceptés.

Die Verfasser der zur Veröffentlichung in der Zeitschrift zugesandten Aufsätze, werden, falls selbige veröffentlicht werden, auf ihre Verfasserrechte zu Gunsten der Zeitschrift verzichten müssen.

MAURICE FRÉCHET

Sur la convergence " en probabilité „

Introduction.

L'énoncé même du théorème de Bernoulli conduit à une conception nouvelle de la notion de convergence. D'une part, on considère une suite composée non de nombres ou de fonctions, mais de valeurs aléatoires. D'autre part, au lieu d'imposer à ces valeurs aléatoires de tendre vers leur limite quelle que soit l'épreuve considérée, on se contente de s'assurer que la différence est probablement petite en précisant cette idée d'une façon convenable. (Nous verrons d'ailleurs plus loin, page 15, qu'on peut le faire de plusieurs façons non équivalentes et pourtant chacune assez naturelle).

C'est ce qui a amené M. Cantelli à définir ce qu'il appelle la convergence « au sens du Calcul des Probabilités » d'une suite de variables aléatoires vers un nombre *certain*, et à en donner les propriétés (*).

Le cas d'une limite certaine étudié par M. Cantelli, est en effet le cas qui se présente dans le théorème de Bernoulli. Mais dans bien des questions qui se présentent naturellement, le cas d'une limite aléatoire doit être envisagé. (Nous en donnerons plus loin des exemples).

On pourrait ramener ce cas plus général au cas de M. Cantelli en convenant de dire que la variable aléatoire X_n converge « au sens du Calcul des Probabilités » vers la variable aléatoire X, quand n croît indéfiniment, si la variable aléatoire $X_n - X$ converge « au sens du Calcul des Probabilités » et de M. Cantelli, vers le nombre certain zéro. Mais d'abord, nous rappelons que, même pour le cas d'une limite certaine, il y a plusieurs façons non équivalentes

(*) *La tendenza ad un limite nel senso del Calcolo delle Probabilità* « R. C. Palermo », t. XLI, 1916, p. 191-201).

(pages 13-16) d'interpréter la nouvelle espèce de limite. D'autre part, même si l'on se restreint à cette définition de la limite, il y a un certain nombre de questions qui se posent et où n'interviennent pas seulement $X_n - X$, mais X_n et X séparément. Sur le terrain plus uni de l'Analyse classique, on réduirait ou on compliquerait considérablement la théorie des limites de fonctions $f_n(x)$ si on n'étudiait jamais séparément le comportement de $f_n(x)$ et de sa limite $f(x)$, si on n'envisageait que leur différence $f_n(x) - f(x)$ pour ne considérer que le cas de limites constantes.

Ce mémoire est consacré à l'étude de diverses généralisations possibles, aux sens du Calcul des Probabilités, de la convergence d'une suite de nombres aléatoires *vers un nombre aléatoire*. On y verra que la plupart des résultats énoncés en italiques sont distincts de ceux qu'on obtiendrait en appliquant les résultats de M. CANTELLI à la convergence d'une différence $X_n - X$ de nombres aléatoires vers le nombre certain zéro.

Ne serait-ce pas, peut-être, pourtant la meilleure manière d'attirer l'attention sur l'importance de la conception nouvelle due à M. CANTELLI, que de la montrer susceptible de nouveaux élargissements ?

.— Il est d'ailleurs curieux d'observer que les principaux résultats de ce mémoire *n'ont pas été obtenus* par cette voie, celle qui consisterait à faire suivre une généralisation de la définition de M. CANTELLI par une généralisation de ses démonstrations et de ses résultats.

C'est une *toute autre voie* que nous avons suivie. Au moment où notre enseignement nouveau nous amenait à concentrer nos pensées beaucoup plus qu'antérieurement, sur le Calcul des Probabilités,nous avons été tout naturellement conduits à *transposer dans le langage des Probabilités* avec les modifications et les précautions convenables *un de nos précédents mémoires* « *Sur diverses modes de convergences d'une suite de fonctions d'une variable* » (1). Celui-ci, consacré à une question de *pure analyse*, avait été rédigé pour comparer entre elles diverses façons modernes d'envisager la notion de convergence. En remplaçant chaque fonction numérique $f(x)$ d'un nombre x par une fonction numérique X_E du résultat aléatoire E d'une épreuve, et en faisant jouer à la probabilité le rôle de la mesure linéaire, nous avons été naturellement conduits à étendre au Calcul des Probabilités,

---

(*) « Bull. Calcutta Math. Soc. », vol. XI, 1921, pp. 187-206.

les notions de convergence « en mesure » (*), de convergence « presque partout », de convergence uniforme « presque partout », qui avaient été comparées entre elles dans notre mémoire de Calcutta. Nous avons aussi été amené à étendre la notion de « distance » de deux fonctions mesurables présentée dans ce même mémoire et à définir ainsi la « distance » de deux variables aléatoires.

Nous avons tenu à marquer l'origine de ces extensions en introduisant l'expression de convergence « en probabilité » qui (tout en abrégeant utilement l'expression due à M. CANTELLI de convergence « au sens du calcul des probabilités ») correspond à la convergence « en mesure ». De même, nous introduisons la notion de variables aléatoires « presque toujours » égales en correspondance avec la notion due à M. LEBESGUE de fonctions égales « presque partout », etc.

On pourrait aussi plus généralement étudier la convergence « au sens du Calcul des Probabilités » d'un élément aléatoire *de nature quelconque* X_E^n vers un élément aléatoire X_E de même nature, tous deux étant parfaitement définis par le résultat aléatoire E d'une épreuve. C'est ce qui a été amorcé dans le cas où X_E^n, X_E sont deux courbes (ou deux fonctions) et où E est un ensemble de valeurs numériques aléatoires en nombre fini fixe, par M. GLIVENKO (**).

.— Nous ne voudrions pas terminer sans signaler que d'autres généralisations des conceptions et des résultats de M. CANTELLI ont été étudiées par divers auteurs.

Les travaux de M. SLUTSKY, bien que faisant jouer à l'écart quadratique moyen un rôle fondamental que nous préférons ne pas lui attribuer, paraissent avoir quelques points communs avec nos propres résultats. Mais nous n'avons pu consulter assez librement et complètement les publications de M. SLUTSKY pour pouvoir les commenter utilement ici. Par contre les mémoires de MM. DELL'AGNOLA et DE FINETTI ne nous paraissent pas consacrés aux mêmes questions que celles qui ont été traitées ici.

Le présent mémoire est le développement de deux notes présentées aux C. R. dans le 1^er^ semestre 1929. Une grande partie des résultats qu'il contient a été exposée oralement à la fin de notre cours de 1928-29 à la Sorbonne.

(*) On sait que la convergence « en mesure » a été considérée à la fois par plusieurs auteurs : M. F. RIESZ, M. HARDY (qui lui avait donné le nom de convergence asymptotique), etc.

(**) « Rendic. Acc. Lincei », vol. VIII, 1928, p. p. 466 et 673.

Définitions et Lemmes.

Avant d'entrer dans le cœur du sujet, il nous sera commode de rappeler des définitions et d'établir quelques lemmes utiles pour la suite.

Rappelons qu'on appelle *variable aléatoire* un nombre X_E dont la valeur est fixée par le résultat aléatoire E d'une épreuve appartenant à une certaine catégorie C. Par exemple, C est la catégorie des tirages de boules d'une urne; E a consisté à tirer un certain groupe de boules, X_E est le nombre des boules blanches de ce groupe.

On voit que X_E est une fonctionnelle dont la valeur X_E est numérique dont la variable E est le résultat d'une épreuve et dont le champ de définition est C. Dans ce qui suit, toutes les fois que nous considèrerons simultanément plusieurs variables aléatoires X_E, Y_E.., nous les supposerons toujours définies sur la même catégorie C d'épreuves. De sorte que nous pourrons généralement nous dispenser d'affecter une lettre à cette catégorie. On pourra aussi se dispenser souvent d'introduire la lettre E et désigner la variable aléatoire par une seule lettre comme X.

Nous ne considèrerons jamais dans ce mémoire que des variables aléatoires X telles qu'il y ait pour chaque nombre certain x une probabilité déterminée que $X < x$. Cette probabilité est une fonction de x, $F(x)$, qu'on peut appeler avec M. Paul Lévy *fonction de probabilité totale* de la variable aléatoire X.

Il est d'ailleurs clair que la fonction des probabilités totales est une fonction non décroissante dont la valeur reste ≥ 0 et ≤ 1.

On peut même dire quelque chose de plus sur cette fonction si l'on admet, *ce que nous ferons toujours dans la suite de ce mémoire, que le théorème des probabilités totales est valable même pour une suite infinie dénombrable d'évènements incompatibles*. C'est là, notons-le pourtant, une hypothèse importante qui ne se présente pas comme une donnée de notre intuition.

En l'appliquant à la suite infinie dénombrable d'évènements incompatibles représentés respectivement par les relations

$$\frac{1}{2}+x \leq X < 1+x,\ \frac{1}{3}+x \leq X < \frac{1}{2}+x,\ldots,\ \frac{1}{n}+x \leq X < \frac{1}{n-1}+x,\ldots,$$

on aura l'expression suivante de la probabilité de l'évènement $x < X < 1 + x$:

$$\left[F(1+x) - F\left(\frac{1}{2}+x\right)\right] + \left[F\left(\frac{1}{2}+x\right) - F\left(\frac{1}{3}+x\right)\right] + \ldots$$

$$+ \left[F\left(\frac{1}{n-1}+x\right) - F\left(\frac{1}{n}+x\right)\right] + \ldots = F(1+x) -$$

$$- \lim_{n \to \infty} F\left(x + \frac{1}{n}\right) = F(1+x) - F(x+0).$$

Or la probabilité du même évènement augmentée de la probabilité que $X = x$ est évidemment la probabilité que $x \leq X < 1 + x$.

Si donc nous désignons d'une façon générale par $Pr\,[E]$ la probabilité d'un évènement fortuit E (dans une catégorie d'épreuves déterminée, ici celle où X est défini) on aura

$$[F(1+x) - F(x+0)] + Pr[X = x] = F(1+x) - F(x)$$

D'où :

$$Pr[X = x] = F(x+0) - F(x)$$

En raisonnant d'une façon analogue, on montrerait que $F(x-0) = F(x)$. Ainsi la fonction de probabilité totale de X *est partout continue à gauche*, elle n'est discontinue à droite que pour les valeurs x dont les probabilités (que $X = x$) *sont différentes de zéro, et ces probabilités sont alors égales aux sauts correspondants de* $F(x)$.

.— Dans tout ce qui suit, nous n'envisagerons que des nombres aléatoires restant toujours finis — sans les supposer nécessairement bornés. — Nous écartons ainsi le cas, par exemple, d'un nombre aléatoire X qui serait défini comme somme d'une série de nombres aléatoires positifs, série qui peut être convergente pour telle épreuve, diverger vers $+\infty$ pour telle autre. La considération d'une telle variable X peut être parfois utile, mais nous la laissons de coté ici pour ne pas compliquer les énoncés.

Cette condition revient exactement à supposer que nous ne considèrerons que des variables aléatoires X, dont la fonction de probabilité totale $F(x)$ vérifie les conditions

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

En effet, dans le cas contraire, puisque $F(x)$ est monotone, et compris entre 0 et 1, on aurait :

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \varepsilon > 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1 - \eta \quad \eta > 0 .$$

Dans le second cas, par exemple, on aurait :

$$1 - \eta = \lim_{n \to \infty} F(n) = F(1) + [F(2) - F(1)] + \ldots + [F(n) - F(n-1)] + \ldots$$

C'est la somme des probabilités des évènements $X < 1$, $1 \leq X < 2$, $2 \leq X < 3$,... . Donc $1-\eta$ est la probabilité que l'un ou l'autre de ces évènements se produise, c'est-à-dire la probabilité que X ne prenne pas la valeur $+\infty$. Or si X est toujours fini cette probabilité est l'unité.

On sait que si une fonction $f(x)$ est continue sur la droite illimitée elle n'est pas toujours — témoin la fonction x^2 — uniformément continue. Mais cette singularité disparaît si l'on suppose que $f(+\infty - 0)$ et $f(-\infty + 0)$ existent, c'est-à-dire si $f(x)$ a une limite finie déterminée quand x tend vers $+\infty$ et une limite finie déterminée quand x tend vers $-\infty$. On le voit en observant qu'en dehors d'un intervalle assez grand dans les deux directions l'oscillation de $f(x)$ sera très petite et que dans cet intervalle $f(x)$ sera uniformément continue.

Or la fonction de probabilité totale d'une valeur aléatoire toujours finie tend vers zéro quand x tend vers $-\infty$ et vers un quand x tend vers $+\infty$. Donc :

si une fonction de probabilité totale est partout continue, elle est uniformément continue.

.— Désignons par $H.K$ l'évènement consistant dans le concours des évènements fortuits H et K, c'est-à-dire dans leur réalisation lors d'une même épreuve. Désignons par $H+K$, l'évènement consistant dans la réalisation d'au moins l'un des évènements H ou K lors d'une même épreuve. Rappelons qu'on a

(1) $$\text{Prob. } H + \text{Prob. } K = \text{Prob. } [H + K] + \text{Prob. } [H.K]$$

On en déduit en particulier les inégalités qui nous seront utiles

(2) $$\text{Pr. } [H + K] \leq \text{Pr. } H + \text{Pr. } K \leq 1 + \text{Pr. } [H + K]$$

(3) $$\text{Pr. } [H.K] \leq \text{Pr. } H + \text{Pr. } K \leq 1 + \text{Pr. } [H.K].$$

En considérant d'abord, pour simplifier, le cas de deux variables aléatoires Y et Z et de deux nombres certains a, b, appelons L, H, K les évènements consistant en ce que

$$|Y+Z| \geq A+B \ , \ |Y| \geq A \ , \ |Z| \geq B .$$

L'évènement contraire à $H+K$ consiste en ce que l'on ait simultanément

$$|Y| < A, |Z| < B \qquad \text{d'où} \quad |Y+Z| < A+B .$$

Donc si L a lieu, $H+K$ aussi, et par suite, en vertu de (2)

$$\text{Pr. } L \leq \text{Pr. } [H+K] \leq \text{Pr. } H + \text{Pr. } K$$

Par voie de récurrence, on étend à n variables le résultat obtenu.

Lemme. Si X_1, X_2,....X_n sont n variables aléatoires définies sur la même catégorie d'épreuves et si A_1,....A_n sont autant de nombres certains, la probabilité que $|X_1 + ... + X_n| \geq A_1 + A_2 + ... + A_n$ est au plus égale à la somme de la probabilité que $|X_1| \geq A_1$, ... et de la probabilité que $|X_n| \geq A_n$.

Un raisonnement analogue montrerait que l'on a

$$\text{Prob.}[|X_1 + ... + X_n| > A_1 + ... + A_n] \leq \text{Prob. } [|X_1| > A_1] + ... + \text{Prob. } [|X_n| > A_n]$$

et aussi

$$\text{Prob. } [X_1 + ... + X_n > A_1 + ... + A_n] \leq \text{Prob. } [X_1 > A_1] + ... + \text{Prob. } [X_n > A_n] .$$

Dans ces inégalités, les A sont chacun positif, négatif ou nul.

Revenons à l'inégalité (3). Il est clair que si H est très probable il sera presque aussi probable de voir se produire le concours de H et de K que de voir se produire K (avec ou sans H). Précisons :

Pour deux évènements fortuits quelconques H et K, si

$$\text{Prob. } H > 1 - \varepsilon \ , \text{ on a}$$
$$\text{Prob. } [H.K] > \text{Pr. } K - \varepsilon .$$

Ceci résulte immédiatement de (3) et de l'hypothèse.

Application. Supposons que Pr. H soit la probabilité que $|X-Y| < \eta$ et que Pr. K soit la probabilité que $Y<A$, X, Y étant deux variables aléatoires, η et A deux nombres certains. Si on a encore

$$\text{Pr. } H > 1 - \varepsilon \ , \text{ on aura}$$
$$\text{Pr. } (H.K) > \text{Pr. } K - \varepsilon .$$

Or quand l'évènement $H.\ K$ a lieu, on a

$$X = (X - Y) + Y < A + \eta .$$

Si donc L est l'évènement consistant en ce que $X < A + \eta$, on aura

$$\text{Pr. } L \geq \text{Pr. } (H.\ K) > \text{Pr. } K - \varepsilon .$$

De même si L' est l'évènement $X \geq A - \eta$, L' est une conséquence des évènements H et $C(K)$ (contraire de K) et l'on aura

$$\text{Pr. } L' > \text{Pr. } C\,(K) - \varepsilon ,$$

d'où

$$\text{Pr. } C\,(L') < \text{Pr. } K + \varepsilon$$

Ainsi, lorsque la probabilité de $|X - Y| \geq \eta$ est $< \varepsilon$, la probabilité que $Y < A$ est inférieure à la somme de ε et de la probabilité que $X < A + \eta$ et supérieure à l'excès sur ε de la probabilité que $X < A - \eta$

Si $F_X(x)$ est la probabilité que $X < x$, et $F_Y(A)$ la probabilité que $Y < A$, on aura

$$F_X(A - \eta) - \varepsilon < F_Y(A) < \varepsilon + F_X(A + \eta) .$$

On a d'ailleurs évidemment : $F_X(A - \eta) \leq F_X(A) \leq F_X(A + \eta)$.
De ces deux systèmes d'inégalités, on déduit

$$|F_Y(A) - F_X(A)| < \varepsilon + [F_X(A + \eta) - F_X(A - \eta)] .$$

Nous arrivons ainsi à la proposition que nous avions en vue :
Lemme : Soient X et Y, deux variables aléatoires définies sur la même catégorie d'épreuves, A et η deux nombres certains dont le second, η, est positif. On a alors, entre les fonctions des probabilités totales F_X et F_Y, de X et de Y, la relation

$$[F_Y(A) - F_X(A)] < [F_X(A + \eta) - F_X(A - \eta)] + \\ + \text{Prob. } [|X - Y| \geq \eta] .$$

Convergence « en probabilité ».

Soient X_n et X deux variables aléatoires définies sur la même catégorie d'épreuves. D'après la terminologie de M. CANTELLI, la variable aléatoire $X_n - X$ converge « au sens du Calcul des probabilités » vers le nombre certain zéro lorsque pour tout nombre positif η la probabilité $\text{Pr. } [|X_n - X| < \eta]$ tend vers l'unité lorsque n croît indéfiniment.

Pour les raisons exposées dans l'Introduction, page 4, nous formulerons une définition entièrement équivalente dans les termes suivants :

La variable aléatoire X_n converge (ou tend) « en probabilité » vers la variable aléatoire X (lorsque n croît indéfiniment), si, pour tout nombre positif η, la probabilité que X_n diffère de X d'au moins η en valeur absolue, tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. La condition de convergence « en probabilité » peut encore s'exprimer ainsi :

« .....si, pour tout couple de nombres positifs ε et η la probabilité que $|X_n - X| \geq \eta$ reste inférieure à ε à partir d'un certain rang ».

M. Cantelli a montré que si X_n converge « au sens du Calcul des Probabilités » aussi bien vers le nombre *certain* X que vers le nombre *certain* Y, ces deux nombres sont nécessairement égaux. *Il n'en est plus de même dans le cas général,* où l'un au moins des deux nombres X et Y n'est pas supposé certain. Mais nous allons voir que les valeurs aléatoires X et Y sont intimement liées.

Par hypothèse, pour tout couple de nombres positifs ε, η, on a à partir d'un certain rang N :

$$\text{Pr.}\left[|X - X_n| \geq \frac{\eta}{2}\right] < \frac{\varepsilon}{2} \quad ; \quad \text{Pr.}\left[|X_n - Y| \geq \frac{\eta}{2}\right] < \frac{\varepsilon}{2} .$$

En vertu du lemme de la page 6, on aura donc

$$\text{Pr.}\,[|X - Y| \geq \eta] < \varepsilon \tag{4}$$

pour $n > N$.

En posant $Z = |X - Y|$ et en désignant par $F_Z(x)$ la fonction de probabilité totale de Z, on voit qu'on a

$$1 - F_Z(\eta) < \varepsilon . \tag{5}$$

Comme l'inégalité (5) est indépendante de n, l'inégalité (5) a lieu, sans condition, pour tout système de nombres positifs ε et η. On a donc, d'abord

$$1 - F_Z(\eta) \leq 0 .$$

pour tout nombre positif η, et, puisque $F_Z(\eta)$ est une probabilité, $F_Z(\eta) = 1$.

Par suite, $F_Z(+0) = 1$. Or, comme Z ne peut être négatif, $F_Z(0) = 0$. Dès lors, la probabilité que $Z = 0$, étant égale, en vertu de la remarque de la page 7, au saut à droite de F_Z au point $x = 0$, est égale à 1. Ainsi, s'il y a deux valeurs aléatoires X et Y qui puissent

être indifféremment considérées comme limite d'une même suite $X_1, X_2, \ldots$ convergente « en probabilité », il y a une probabilité égale à celle de la certitude que ces deux valeurs soient égales. Si ces valeurs X, Y sont certaines, elles sont alors nécessairement égales comme l'a fait observer M. CANTELLI. Il en serait encore de même si X et Y étaient des valeurs aléatoires ne prenant chacune qu'un nombre fini de valeurs numériques déterminées par un jeu de hasard. Dans les jeux, nous entendons les jeux usuels ; cartes, dés...., la probabilité d'un des évènements à considérer n'est égale à zéro ou à l'unité que s'il y a impossibilité ou certitude. Mais dans le cas le plus général, il est parfaitement légitime de considérer une valeur aléatoire $Z = (X - Y)$ non assujettie à être nulle et dont cependant la probabilité qu'elle soit nulle soit égale à l'unité (*).

Nous dirons que deux valeurs aléatoires X, Y définies sur la même catégorie d'épreuves sont « *presque toujours* » *égales* lorsqu'il y a une probabilité nulle qu'elles soient numériquement différentes.

Etant donnée une suite de valeurs aléatoires X_n qui converge « en probabilité » vers une valeur aléatoire X, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une valeur aléatoire Y soit aussi la limite « en probabilité » de X_n est que X et Y soient « presque toujours » égales.

Nous avons vu que la condition est nécessaire. Réciproquement, supposons que Y est « presque toujours » égale à X. On a d'après la

page 9

$$\Pr.\left[|X_n - Y| \geq \eta\right] \leq \Pr.\left[|X_n - X| \geq \frac{\eta}{2}\right] + \Pr.\left[|X - Y| \geq \frac{\eta}{2}\right]$$

et comme la dernière probabilité est nulle, pour tout $\eta > 0$, on aura

$$\Pr.\left[|X_n - Y| \geq \eta\right] \leq \Pr.\left[|X_n - X| \geq \frac{\eta}{2}\right]$$

Or le second membre tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, donc aussi le premier.

.— Si deux valeurs aléatoires Z, T sont « presque toujours » égales, on peut toujours les considérer comme limites « en probabilité » d'une même suite de variables aléatoires U_n. Il suffit de prendre par exemple $U_n = Z$, quel que soit n.

(*) Par exemple, dans le cas où la probabilité qu'un point M d'un segment AB soit situé sur $A'B'$ est proportionnelle à $A'B'$, la probabilité que M soit par exemple au milieu de AB, est nulle. Dans ce cas, prenons $X = Y = AM$, sauf lorsque M est au milieu de AB, cas où nous prendrons $X = AM$, $Y = 2AM$. Et prenons $Z = X - Y$.

Deux valeurs aléatoires Z, U, « presque toujours » égales à une troisième V, sont « presque toujours » égales entre elles. Cela résulte de ce qu'en vertu du lemme de la page 9, on a

$$0 \leq \text{Pr.}\,[|Z-U|>0] \leq \text{Pr.}\,[|Z-V|>0] + \text{Pr.}\,[|U-V|>0] = 0$$

Les remarques suivantes sont souvent utiles :

I. Si deux valeurs aléatoires X_n, Y_n définies sur la même catégorie d'épreuves sont telles qu'on ait toujours $|X_n| \leq |Y_n|$ et si Y_n tend « en probabilité » vers zéro, il en est de même de X_n.

Car $\text{Pr.}\,[|Y_n| \geq \eta] > \text{Pr.}\,[|X_n| \geq \eta]$ pour toute valeur de $\eta > 0$.

II. Si des nombres aléatoires $X_n, \ldots, Y_n, T_n$ en nombre fini fixé r convergent « en probabilité » vers $X, Y, \ldots, T$, la somme $X_n + \ldots + T_n$ converge « en probabilité » vers $X + \ldots + T$. Ceci résulte de ce que en vertu du lemme de la page 9

$$\text{Pr.}\,[|X_n + \ldots + T_n - X - \ldots - T| \geq \varepsilon] \leq \text{Pr.}\left[|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{r}\right] + \\ + \ldots + \text{Pr.}\left[|T_n - T| \geq \frac{\varepsilon}{r}\right].$$

Convergence au sens ordinaire.

La définition usuelle de la convergence nous aurait conduit à dire qu'une suite de variables aléatoires X_n *converge « au sens ordinaire »* vers la variable aléatoire X, si pour chacune des épreuves de la catégorie considérée, et pour tout nombre $\eta > 0$, $|X_n - X| < \eta$ à partir d'un certain rang N. Le nombre N dépendra en général du résultat de l'épreuve considérée, aussi bien que de η. Si le nombre N ne dépend que de η, on dira que X_n converge *uniformément* vers X « *au sens ordinaire* ». Par exemple si X est une variable aléatoire quelconque et si l'on pose $X_n = X + \frac{1}{n}$, X_n est une variable aléatoire qui converge uniformément « au sens ordinaire » vers la variable aléatoire, X.

Les deux définitions sont distinctes. Par exemple, si toutes les épreuves possibles sont en infinité dénombrable et si on peut les numéroter et les désigner par e_1, e_2..., prenons $X_n = X + Y_n$, en désignant par Y_n un nombre égal à $\frac{p}{n}$, p étant le rang de l'épreuve où

il faut définir X_n. Alors X_n converge vers X au sens ordinaire, mais non uniformément.

Si X_n converge *uniformément* vers X « au sens ordinaire », la probabilité que $|X_n - X| \geq \eta$ est rigoureusement nulle quand n est suffisamment grand. Par conséquent X_n converge aussi vers X « en probabilité ». Si la convergence a lieu « au sens ordinaire » sans être uniforme, alors, pour chaque valeur de n, aussi petit que soit η, il peut y avoir des épreuves pour lesquelles $|X_n - X| \geq \eta$ et la probabilité de cet évènement n'est pas nécessairement nulle. Il n'est même pas évident qu'elle tende vers zéro.

Mais dans ce cas, la valeur aléatoire $(X_n - X)$ converge « au sens ordinaire » vers le nombre certain zéro.

Or en généralisant un important théorème de M. Borel, M. Cantelli a démontré que dans ce cas $X_n - X$ converge aussi vers zéro « au sens du Calcul des Probabilités » (*).

En résumé : si une suite de variables aléatoires X_n converge « au sens ordinaire » vers la variable aléatoire X, la convergence a lieu aussi « en probabilité » (1). L'exemple du théorème de Bernoulli montre d'ailleurs que la réciproque n'est pas vraie.

.— On peut même donner *un exemple d'une variable aléatoire X_n qui converge « en probabilité » vers une variable aléatoire X sans converger « au sens ordinaire » pour quelque épreuve que ce soit* ».

Soit, en effet, $f_n(x)$, une certaine fonction de x. Prenons pour X_n la valeur que prend $f_n(x)$ lorsqu'on donne à x une valeur numérique prise au hasard à l'intérieur de l'intervalle 0, 1, et dans des conditions telles que la probabilité de l'inégalité $\alpha \leq x \leq \beta$ soit égale à $\beta - \alpha$.

Considérons les nombres rationnels distincts $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots \frac{p-1}{p}, \ldots$ et soit $\frac{p}{q}$ celui qui a le rang n. Prenons $f_n\left(\frac{p}{q}\right) = 1, f_n(0) = f_n\left(\frac{p-1}{q}\right) = f_n\left(\frac{p+1}{q}\right) = f_n(1) = 0$, et supposons que la courbe $y = f_n(x)$ soit la ligne polygonale dont les sommets viennent d'être définis. Alors X_n tend « en probabilité » vers le nombre certain $X = 0$. Car

$$\text{Pr.}\,[\,|X_n - X| \geq \eta\,] \leq \text{Pr.}\,[\,|X_n - X| > 0\,] = \frac{2}{q}$$

et il est clair que q croît indéfiniment avec n.

(*) Ce même résultat est aussi obtenu par nous, page, 17 d'une autre façon.

Pourtant X_n ne converge jamais vers X. Car, si $0 < \xi < 1$ il y a un nombre rationnel de dénominateur donné q, soit $\frac{p}{q}$, tel que

$$\frac{p - \frac{1}{2}}{q} \leq \xi < \frac{p + \frac{1}{2}}{q}.$$

Si $\frac{p}{q}$ a le rang m, on aura $f_m(\xi) \geq \frac{1}{2}$. Il est clair que si q croît indéfiniment, m aussi. Dès lors, $f_m(\xi) \geq \frac{1}{2}$ pour une certaine infinité de valeurs m de n. Ainsi, pour chaque épreuve $X_n \geq \frac{1}{2}$ pour une infinité de valeurs m de n : X_n ne converge jamais au sens ordinaire vers X.

Faisons une remarque en passant. L'écart quadratique moyen μ_n de $X_n - X$ étant la racine carrée de la valeur moyenne de $(X_n - X)^2$, on a ici :

$$\mu_n^2 = \int_0^1 [f_n(x)]^2 dx = 2 \int_{\frac{p-1}{q}}^{\frac{p}{q}} [qx - p + 1]^2 dx$$

$$= 2 \int_{\frac{p-1}{q}}^{\frac{p}{q}} (qx - p + 1)^2 dx = \frac{2}{3q} \left[(qx - p + 1)^3 \right]_{\frac{p-1}{q}}^{\frac{p}{q}} = \frac{2}{3q}$$

Lorsque n croît indéfiniment, q aussi, donc μ_n tend vers zéro.

D'ailleurs, si on désigne par $\bar{Y}$ la valeur moyenne de Y, on tire, de l'inégalité :

$$\frac{1}{2}(X_n - X_{n'})^2 \leq X_n^2 + X_{n'}^2$$

la formule

$$\frac{1}{2}\overline{(X_n - X_{n'})^2} \leq \mu_n^2 + \mu_{n'}^2.$$

Il en résulte que pour la suite envisagée, $\overline{(X_n - X_{n'})^2}$ tend vers zéro quand le plus petit des nombres n et n' croît indéfiniment.

Convergences d'une autre nature.

L'exemple que nous venons de citer, et surtout l'analogie avec ce qui se passe pour le cas des fonctions ordinaires (*), conduit à *considérer une nouvelle espèce de convergence.*

(*) Voir notre mémoire de Calcutta, cité page 4.

Etant données des variables aléatoires X, X_1, X_2... X_n,... définies sur la même catégorie d'épreuves, le résultat de chaque épreuve assigne à ces variables une suite de valeurs numériques bien déterminées, pour lesquelles il peut y avoir, ou non, convergence de X_n vers X. La convergence de ces valeurs de X_n vers cette valeur de X est donc un évènement fortuit qui, pour chaque épreuve, a lieu, ou non, et dépend — en général — du résultat de cette épreuve. Supposons que cet évènement ait une probabilité déterminée. (Nous laissons ici de coté la question de savoir s'il y a là une hypothèse nouvelle). Nous pourrons alors introduire une nouvelle notion.

Etant données deux variables aléatoires X_n et X définies sur la même catégorie d'épreuves, nous dirons que X_n *converge « presque toujours » vers* X, si la probabilité de la convergence de X_n vers X est égale à l'unité.

Il est bien clair que si la variable aléatoire Y_n converge « au sens ordinaire » vers la variable aléatoire Y, elle converge aussi, a fortiori, « presque toujours » vers Y.

Théorème : Si X_n *converge « presque toujours » vers* X, X_n *converge aussi « en probabilité » vers* X.

Soit e l'évènement consistant en ce que X_n converge vers X, E_n l'évènement consistant en ce que $|X_n - X| < \eta$, e_n l'évènement consistant en ce qu'on a à la fois

$$|X_n - X| < \eta, |X_{n+1} - X| < \eta, \ldots$$

Il est clair que, si e_n a lieu, e_{n+1} aussi. Donc

$$\text{Pr. } [e_n] \leq \text{Pr. } [e_{n+1}]$$

L'évènement E consistant en ce qu'ait lieu l'un au moins des évènements e_1, e_2, ... e_n,... peut se présenter sous les modalités incompatibles e_1, e'_2, e'_3, ... e'_n, ... en appelant e'_n l'évènement consistant en ce que e_n a lieu sans e_{n-1}. Donc :

$$\text{Pr. } [E] = \text{Pr. } [e_1] + \text{Pr. } [e'_2] + \ldots + \text{Pr. } [e'_n] + \ldots$$

$$= \text{Pr. } [e_1] + \{\text{Pr. } [e_2] - \text{Pr. } [e_1]\} + \ldots + \{\text{Pr. } [e_n] - \text{Pr. } [e_{n-1}]\} + \ldots$$

$$\text{(7)} \qquad \text{Pr. } E = \lim_{n \to \infty} \text{Pr. } [e_n]$$

Or pour chaque épreuve où X_n converge vers X, l'un au moins des évènements e_1, e_2,... a lieu. Autrement dit, quand e a lieu, E aussi. Donc

$$\text{Pr. } [e] \leq \text{Pr. } [E]$$

Et comme X_n converge « presque toujours » vers X

$$1 = \text{Pr. } [e] \leq \text{Pr. } [E] \leq 1 .$$

D'où :

$$\lim_{n \to \infty} \text{Pr. } [e_n] = 1 . \tag{8}$$

Or, puisque E_n a lieu quand e_n a lieu

$$\text{Pr. } [e_n] \leq \text{Pr. } [E_n]. \tag{9}$$

On tire de (8) et (9) $\lim_{n \to \infty} \text{Pr. } [E_n] = 1 .$

Ceci ayant lieu pour toute valeur de $\eta > 0$, la proposition est établie.

Il en résulte en particulier que :
si une variable aléatoire Y_n converge au sens ordinaire vers la variable aléatoire Y, elle converge aussi vers Y « en probabilité », proposition obtenue précédemment par une autre voie.

La réciproque de cette dernière proposition n'est pas exacte, comme nous l'avons vu plus haut, page 14. N'est pas non plus exacte la réciproque du théorème qui vient d'être démontré. C'est ce qui résulte de l'exemple de la page 14.

Si la convergence « presque toujours » est, d'après cela, plus stricte que la convergence « en probabilité », elle se trouve par contre équivalente à une autre nature de convergence dont nous allons parler : la convergence uniforme « en probabilité ».

Chemin faisant, nous rattacherons ces deux notions à une autre : la convergence forte, qui ne jouera qu'un rôle d'intermédiaire.

.— M. Cantelli a montré que le théorème de Bernoulli peut être précisé. Soit f_n la fréquence d'un évènement de probabilité constante p au cours de n épreuves, $Q_n(\eta)$ la probabilité pour que $|f_n - p| < \eta$, $\tilde{\omega}_n(\eta)$ la probabilité pour que l'on ait *à la fois*, comme résultat d'une même épreuve :

$$|f_n - p| < \eta , \ |f_{n+1} - p| < \eta , \ldots$$

Il est clair que $\tilde{\omega}_n(\eta) \leq Q_n(\eta)$. Le théorème de Bernoulli affirme que $Q_n(\eta)$ tend vers l'unité quand n croît indéfiniment. M. Cantelli a démontré la proposition plus précise : $\tilde{\omega}_n(\eta)$ tend aussi vers l'unité.

C'est ce mode de convergence que M. Khintchine appelle la convergence forte, au sens du Calcul des Probabilités, de f_n vers p.

Disons provisoirement d'une manière générale, qu'une variable aléatoire Y_n converge fortement au sens du Calcul des Probabilités vers la variable aléatoire Y, si, pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\lim_{n \to \infty} \text{Pr.}\,[e_n^{(\varepsilon)}] = 1$$

en appelant $e_n^{(\varepsilon)}$ l'évènement consistant en ce qu'on a pour une même épreuve, à la fois, les inégalités $|Y_n - Y| < \varepsilon$, $|Y_{n+1} - Y| < \varepsilon, \ldots$

Il résulte de l'inégalité (8) de la page 17 que, si une variable aléatoire X_n converge « presque toujours » vers une variable aléatoire X, X_n converge fortement au sens du Calcul des Probabilités vers X.

Seulement la convergence ainsi définie fait jouer un rôle de premier plan à des évènements $e_n^{(\varepsilon)}$ *à double indice* et en particulier laisse sans réponse la question de la comparaison des *limites* de X_n et des valeurs de X. Or on peut préciser.

Si l'on suppose que X_n converge fortement vers X alors étant données deux nombres $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, on peut trouver un certain nombre N tel qu'il y ait une probabilité $> 1 - \eta$ que l'on ait à la fois

$$|X_n - X| < \varepsilon \qquad \text{pour toutes les valeurs de } n > N.$$

Soient p un entier arbitraire, η un nombre positif arbitraire. Appelons $e^{(p)}$ l'évènement consistant dans le concours simultané des inégalités $|X_n - X| < \frac{1}{p}$ pour n supérieur à un certain entier N_p.

D'après ce qui précède, on peut choisir N_p de sorte que $\text{Pr.}\,[e^{(p)}] > 1 - \frac{\eta}{2^p}$. L'évènement E_η consistant dans le concours des évènements $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots e^{(p)} \ldots$ aura une probabilité $> 1 - \eta$. Or, soit ϑ un nombre positif arbitraire choisi indépendamment de η et de E_η. Quand E_η a lieu, $e^{(p)}$ aussi et, si l'on prend $\frac{1}{p} < \vartheta$, on a

$$|X_n - X| < \vartheta$$

à la fois pour toutes les valeurs de n supérieur à un certain entier N_p indépendant de l'épreuve envisagée.

Autrement dit, X_n converge uniformément vers X quand l'évènement E_η a lieu et l'on a $\text{Pr.}\,[E_\eta] \geq 1 - \eta$.

Il en résulte en particulier que l'ensemble des épreuves où X_n converge au sens ordinaire vers X a une probabilité égale à l'unité ;

car cet ensemble comprend évidemment chacun des E_η. Dès lors X_n converge « presque toujours » vers X.

D'ailleurs la réciproque est vraie, comme nous l'avons vu plus haut. Ainsi *la convergence forte au sens du Calcul des Probabilités est entièrement équivalente à la convergence qui a lieu « presque toujours »*. Mais nous avons obtenu quelque chose de plus. Nous avons montré que dans la convergence forte, le rôle tenu par les évènements à double indice $e_n^{(\varepsilon)}$ peut être tenu par les évènements à simple indice E_η. Et ceux-ci ont une signification beaucoup plus simple :

X_n converge uniformément pour chacun des évènement E_η dont la probabilité est, en outre, $> 1-\eta$. Il est dès lors naturel de dire que dans ces conditions X_n *converge uniformément « en probabilité »* vers X. Il est d'ailleurs clair que, réciproquement, la convergence uniforme « en probabilité » entraîne, par définition même, la convergence forte au sens du Calcul des Probabilités.

Finalement, nous avons établi que : la condition nécessaire et suffisante pour que la variable X_n converge uniformément « en probabilité » vers X est que X_n converge « presque toujours » vers X.

Nous voyons que *si l'on porte son attention sur la propriété de convergence ordinaire, il y a lieu de donner à la convergence forte au sens du Calcul des Probabilités la forme équivalente de la convergence qui a lieu « presque toujours »*. *Si*, au contraire, *c'est de l'uniformité de la convergence qu'on a besoin, il sera préférable de donner à la convergence forte au sens du Calcul des Probabilités la forme équivalente de la convergence uniforme « en probabilité »*.

Remarque. On pourrait songer à exprimer ce qui précède en disant que si X_n converge « presque toujours » vers X, X_n converge même « presque toujours uniformément ».

Toutefois, il y aurait inconvénient à le faire pour la raison suivante. Quand nous disons que X_n converge « presque toujours » vers X, nous entendons par là qu'il y a un évènement déterminé e de probabilité égale à l'unité, tel que la convergence ordinaire ait lieu quand e se produit.

Par analogie, il est naturel de dire qu'une variable aléatoire Y_n converge « presque toujours uniformément » vers la variable aléatoire Y lorsqu'il existe un évènement déterminé e' de probabilité égale à l'unité tel que X_n converge uniformément vers X dans l'ensemble des épreuves où e' a lieu. Or cette condition est plus stricte que celle qui a été établie dans le dernier théorème. Et on peut donner *un exemple d'une variable aléatoire Z_n qui converge « presque*

toujours » *et même toujours vers la variable aléatoire Z et qui ne converge pas uniformément* « *presque toujours* ». Autrement dit, pour cette suite particulière de variables, il n'y a aucun évènement e' de probabilité égale à l'unité tel que X_n converge vers X uniformément quand e' a lieu.

Reprenons en effet l'exemple de la page 14, mais en choisissant autrement la fonction $f_n(x)$. Prenons encore pour $y = f_n(x)$ une ligne polygonale, mais dont les sommets ont les ordonnées

$$f_n(0) = 0 \ , \ f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \ , \ f_n\left(\frac{2}{n}\right) = 0 \ , \ f_n(1) = 0 \ .$$

Alors X_n converge toujours vers zéro. Soit maintenant e' un évènement de probabilité égale à l'unité. Si X_n convergeait uniformément quand e' a lieu, alors, pour tout p entier il y aurait un nombre N tel que $|X_n - X| = |X_n| < \frac{1}{p}$ partout sur e' pour $n > N$. Or $f_{N+1}^{(x)} \geq \frac{1}{2}$ par exemple sur un intervalle de longueur $\frac{1}{N+1}$. Si l'on suppose $p > 2$, le hasard ne pourrait déterminer un point x appartenant à cet intervalle et à la fois à e' pour lequel $f_{N+1}(x) < \frac{1}{p}$. Donc la probabilité de e' serait inférieure à $1 - \frac{1}{N+1}$, alors qu'on suppose cette probabilité égale à l'unité.

Il y a donc lieu de distinguer la convergence uniforme « presque toujours » de la propriété qui vient d'être établie précédemment. Mais il reste légitime de continuer à décrire celle-ci comme une convergence uniforme « en probabilité ».

Ainsi nous dirons qu'une suite de variables aléatoires X_n *converge uniformément* « *en probabilité* » vers la variable aléatoire X, si, à tout nombre $\eta > 0$, correspond un évènement E_η de probabilité $> 1 - \eta$ et tel que X_n converge uniformément vers X quand a lieu l'évènement E_η.

Nous avons montré que *la convergence uniforme* « *en probabilité* » *est équivalente à la convergence* « *presque toujours* ».

Nous avons ainsi trois échelles de convergences de plus en plus strictes :

la convergence « en probabilité » ;

la convergence « presque toujours » ou la convergence uniforme « en probabilité » ;

la convergence uniforme « presque toujours ».

Nous montrerons (page 42) que d'une suite de variables aléatoires qui converge « en probabilité » on peut tirer une suite de variables qui converge « presque toujours » ou, ce qui revient au même, qui converge uniformément « en probabilité ».

Mais il est intéressant de déterminer des cas très généraux où on soit assuré qu'il en est ainsi pour la suite primitive elle-même. Tel est le cas suivant qui comprend, comme nous le verrons, le cas de BERNOULLI :

Pour qu'une suite de variables aléatoires X_n converge « presque toujours » vers une variable aléatoire X, il suffit que, pour au moins une valeur de l'ordre positif, la série

$$M_1^{(s)} + \ldots + M_n^{(s)} + \ldots - .$$

soit convergente, — en appelant $M_n^{(s)}$ la valeur moyenne de $|X_n - X|^s$.

En effet, d'après l'inégalité de BIENAYMÉ, on a

$$\text{Pr.} \left[|X_n - X| < \varepsilon \right] < 1 - \frac{M_n^{(s)}}{\varepsilon^s}$$

On a donc, avec les notations de la page 18

$$1 \geq \text{Pr. } e_n^{(\varepsilon)} \geq 1 - \frac{M_n^{(s)} + M_{n+1}^{(s)} + \ldots}{\varepsilon^{(s)}}$$

d'où : $\lim_{n \to \infty} \text{Pr. } e_n^{(\varepsilon)} = 1$ pour tout ε positif. Ainsi X_n converge fortement et par suite « presque toujours » vers X.

En particulier, prenons $X = 0$ et $X_n = v_n - \bar{v}_n$ en posant $v_n = \dfrac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}$ et en appelant $Y_1, Y_2, \ldots Y_n, \ldots$ une suite quelconque de variables aléatoires *indépendantes. Pour que $v_n - \bar{v}_n$ converge « presque toujours » vers zéro, il suffit que les écarts moyens V_k d'ordre 4 des Y_k soient non seulement finis mais bornés dans leur ensemble.* Car, *s'il existe un nombre B supérieure* à tous les V_k, on aura

$$M_n^{(4)} = \frac{1}{n^4} \left\{ \sum_k \overline{(Y_k - \bar{Y}_k)^4} + 6 \sum_{k,h} \overline{(Y_k - \bar{Y}_k)^2}\, \overline{(Y_h - \bar{Y}_h)^2} \right\}$$

$$\leq \frac{1}{n_4} \left[n B^4 + 6 \frac{n(n-1)}{2} B^4 \right].$$

Par suite, la série $\Sigma\ M_n^{(4)}$ est bien convergente.

C'est ce qui aura lieu en particulier si les Y_k sont bornés dans leur ensemble. Car alors, il en sera de même des $\overline{Y}_k$ et par suite des V_k. Dans le cas de BERNOULLI, $Y_n = f_n$ reste entre 0 et 1 et $\overline{Y}_n = p$. Nous avons donc démontré, comme cas particulier, *que si f_n est la fréquence d'un évènement fortuit de probabilité constante p au cours de n épreuves, il y a une probabilité égale à celle de la certitude que f_n converge vers p.*

Limite de la suite des fonctions de probabilités totales.

Soient $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$, une suite de variables aléatoires qui convergent « en probabilité » vers X, soient $F_n(x)$ et $F(x)$ les fonctions de probabilités totales de X_n et de X, c'est-à-dire les probabilités respectives pour que $X_n < x$ et $X < x$. Etant donnés les deux nombres positifs, arbitraires ε et η, il existe par hypothèse un entier n, tel que Pr. $[|X_n - X| \geq \eta] < \varepsilon$, pour $n > N$. En vertu du lemme de la page 10, on a donc

$$|F_n(x) - F(x)| \leq [F(x+\eta) - F(x-\eta)] + \varepsilon .$$

Si donc x est un point où F est continue, on pourra choisir ε et η de sorte que le second membre soit aussi petit que l'on veut, et alors il en sera de même du premier pour n assez grand. $F_n(x)$ *converge donc vers* $F(x)$ *en tout point de continuité de* $F(x)$. Or $F(x)$ étant monotone, $F(x)$ n'a qu'une suite dénombrable de points de discontinuité. Ainsi $F_n(x)$ converge vers $F(x)$ pour toute valeur de x, sauf, peut-être, en un ensemble dénombrable de points.

Ceci suffit pour déterminer $F(x)$ connaissant seulement les $F_n(x)$. En effet, les $F_n(x)$ étant compris entre zéro et l'unité, la plus grande des limites de $F_n(x)$ quand, x restant fixe, n croît indéfiniment, est bien déterminée. Appelons la $\Psi(x)$; cette fonction est monotone et elle est égale à $F(x)$ sauf peut-être en un ensemble dénombrable de points. On a donc partout $F(x-0) = \Psi(x-0)$ et comme on a vu (page 7) que $F(x)$ est partout continue à gauche on voit que $F(x)$ est finalement partout déterminée par la formule

$$F(x) = \Psi(x-0) .$$

Considérons d'abord le cas particulier où la fonction $F(x)$, — déterminée, par exemple, de cette façon — est partout continue. Alors elle est aussi (p. 8) uniformément continue. Se donnant seu-

lement $\varepsilon > 0$, on peut déterminer η, indépendamment de x, de sorte que

$$F(x+\eta) - F(x-\eta) < \varepsilon$$

et par suite

$$|F_n(x) - F(x)| < 2\varepsilon \qquad \text{pour } n > N .$$

Or N est indépendant de x. Donc : *si la fonction $F(x)$ de probabilité totale de X est partout continue, elle est partout la limite* uniforme *de la fonction $F_n(x)$ de probabilité totale de X_n.*

Considérons maintenant le cas où $F(x)$ n'est pas partout continue. Il peut arriver que $F(x)$ soit continue dans certains intervalles, en nombre fini ou non. Si elle n'est pas continue aux deux extremités de l'un de ces intervalles, elle n'y est peut-être pas uniformément continue mais elle l'est dans tout intervalle intérieur. Le raisonnement fait plus haut prouvera que $F(x)$ est la limite uniforme de $F_n(x)$ sur tout intervalle où $F(x)$ est uniformément continue.

Observons qu'en un point ξ de discontinuité de $F(x)$, la seule suite des $F_n(\xi)$ donne un renseignement sur $F(\xi)$. En effet, si x' et x'' sont deux points de continuité de $F(x)$, encadrant ξ, la plus grande et la plus petite des limites des $F_n(\xi)$ seront évidemment comprises entre $F(x')$ et $F(x'')$ et par suite aussi entre $F(\xi - 0)$ et $F(\xi + 0)$. Ainsi, *aux points ξ de discontinuité de $F(x)$, la suite des $F_n(\xi)$ ne converge peut-être pas vers $F(\xi)$, mais toutes les limites de cette suite sont comprises entre $F(\xi - 0) = F(\xi)$ et $F(\xi + 0)$.*

.— Il peut être intéressant d'observer qu'*on peut toujours tirer de la suite des X_n une suite dont les fonctions de probabilités totales convergent pour toute valeur de x.* En effet, soit $c_1, c_2, \ldots$ l'ensemble, nécessairement dénombrable, des points de discontinuités de $F(x)$. Considérons $F_n(c_1)$, $F_n(c_2), \ldots$ comme les coordonnées d'un point M_n de l'espace (E_ω) (voir E. A. (*) p. 81). Comme ces coordonnées sont entre 0 et 1 l'ensemble des M_n est borné et on peut en tirer (E. A., p. 117) (*) une suite convergente en donnant à n une certaine suite de valeurs $n_1, n_2, \ldots$ Pour cette suite de valeurs de n, la suite des $F_n(x)$ convergera quel que soit x. La limite $\Psi(x)$ de cette suite sera égale à $F(x)$ aux points de continuité de $F(x)$; elle sera comprise entre $F(x+0)$ et $F(x)$ aux points de discontinuité de $F(x)$.

Les raisonnements précédents n'infirment pas l'hypothèse que

(*) Nous représentons dans la suite, par la notation E. A., notre livre *Les espaces abstraits...*, chez Gauthier-Villars, Paris, 1928.

la suite initiale des $F_n(x)$ soit elle-même convergente partout, ni celle qu'une suite convenablement extraite des celle des $F_n(x)$ converge partout précisément vers $F(x)$. Nous allons indiquer *des exemples montrant qu'aucune de ces hypothèses n'est nécessairement satisfaite.*

Prenons $X_{2s-1} = \frac{1}{s}$, $X_{2s} = -\frac{1}{s}$, $X = 0$. Ce sont, pour chaque valeur de s, des nombres certains, de sorte que non seulement X_n converge en probabilité vers X, mais même X_n converge au sens ordinaire, vers X.

Or on a

$$F_{2s-1}(x) = 0 \text{ si } x \leq \frac{1}{s}, \quad F_{2s-1}(x) = 1 \text{ si } x > \frac{1}{s},$$

$$F_{2s}(x) = 0 \text{ si } x \leq -\frac{1}{s}, \quad F_{2s}(x) = 1 \text{ si } x > -\frac{1}{s}.$$

Donc la suite des $F_n(x)$ converge bien, pour $x \neq 0$, mais elle prend alternativement les valeurs 0 et 1 pour $x = 0$. La première hypothèse n'est donc pas satisfaite ici.

Il est vrai qu'on peut extraire de ces $F_n(x)$ une suite (à savoir la suite des $F_{2s}(x)$) qui converge partout vers $F(x)$. Mais cela n'a pas toujours lieu non plus. Il suffit, pour le voir, de prendre $X_n = -\frac{1}{n}$. Alors la suite initiale des $F_n(x)$ est bien elle-même convergente quel que soit x. Mais sa limite pour $x = 0$ est $1 \neq F(0) = 0$. La seconde hypothèse n'est donc pas vérifiée dans le second exemple.

Enfin, si l'on appelle X, Y deux valeurs aléatoires « presque toujours » égales et si l'on prend $X_n = Y$ quel que soit n, on conclut de ce qui précède que les fonctions de probabilité totales de X et de Y sont égales en tout point de continuité de l'un d'elles. Comme elles sont continues à gauche, elles sont donc égales partout : *deux valeurs aléatoires « presque toujours » égales ont même fonction de probabilité totale.*

.— D'ailleurs, *la réciproque n'est pas vraie.* Soient Z et T deux valeurs aléatoires ne prenant que les valeurs zéro et un, mais de sorte que si l'une prend la valeur zéro, l'autre prend la valeur 1. Non seulement ces nombres Z et T ne seront pas « presque toujours » égaux mais ils seront toujours inégaux et $|Z - T| = 1$ ne s'approchera jamais de zéro. Pourtant, s'il y a égale probabilité des deux valeurs zéro et un pour le premier, il en sera de même pour le second et leurs fonctions de probabilité totale seront identiques.

Cependant la réciproque est vraie pour deux nombres certains : si deux nombres certains ont même fonction de probabilité totale, ils sont égaux.

Il est d'ailleurs facile de voir ce qu'exprime l'identité des fonctions de probabilités totales de deux valeurs aléatoires X, Y. Appelons E_x l'évènement consistant en ce que $X = x$ et E'_x l'évènement consistant en ce que $Y = x$. On voit que la certitude peut être répartie, soit entre les évènements E_x correspondant à toutes les valeurs numériques de x (peut-être n'y aura-t-il aucun évènement correspondant à certaines valeurs de x ?), soit entre les évènements E'_x. Dire que les fonctions de probabilité totales des deux nombres aléatoires X et Y sont égales, c'est dire que ces deux répartitions — qui peuvent être très différentes — étant faites, un ensemble d'évènements E_x et un ensemble d'évènements E'_x correspondant (c'est-à-dire avec les mêmes indices) ont même probabilité. Ou, tout au moins, si l'on veut éviter toute difficulté sur l'existence des probabilités, il doit en être ainsi quand chacun des ensembles a une probabilité définie.

Autrement dit, on obtient toute valeur aléatoire Y qui a même fonction de probabilité totale que X, en effectuant une transformation de l'ensemble des évènements possibles en lui-même, de sorte que les probabilités soient conservées dans la transformation et en attribuant à Y pour un évènement déterminé la valeur qu'avait X avant la transformation.

Convergence « en probabilité » des fonctions continues.

Soient $q_n(t)$, $q(t)$ les probabilités pour que $|X_n| < t$; $|X| < t$. Si X_n tend « en probabilité » vers X, $|X_n|$ tend aussi « en probabilité » vers $|X|$; car

$$|X_n - X| \geq \big||X_n| - |X|\big|$$

Donc $q_n(t)$ tend vers $q(t)$ aux points de continuite de $q(t)$.

Nous supposons que X_n et X sont toujours finis (non nécessairement bornés). Par suite $q_n(t)$ et $q(t)$ tendent vers l'unité quand t croît indéfiniment. Pour tout entier n et tout $\varepsilon > 0$ on peut donc fixer B_n tel que

$$q_n(B_n) > 1 - \varepsilon .$$

Lemme. On peut choisir B_n indépendant de n.

Pour cela prenons un nombre B_0 assez grand pour que $q(B_0) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

On peut supposer que B_0 soit un point de continuité de $q(t)$. Alors en prenant n assez grand $(n > N)$ on aura

$$q_n(B_0) - q(B_0) > -\frac{\varepsilon}{2}$$

d'où :

$$q_n(B_0) > 1 - \varepsilon .$$

Prenons pour B le plus grand des nombres $B_0, B_1, \ldots B_N$. On voit qu'on aura pour tout entier n

$$q_n(B) > 1 - \varepsilon .$$

.—Ceci étant, soit $v(x)$ une fonction continue de x ; elle est uniformément continue pour $|x| \leq B$. Si ω est un nombre positif donné en même temps que ε, il existe un nombre η tel que $|v(x) - v(x')| < \omega$ quand x, x' varient dans $(-B, +B)$ sous la condition $x - x' < \eta$.

Si l'on a simultanément pour une même épreuve

$$|X| < B \ , \ |X_n| < B \ , \ |X - X_n| < \eta \ , \ \text{on aura}$$
$$|v(X) - v(X_n)| < \omega .$$

Ces trois évènements ont des probabilités chacune au moins égale à $1 - \varepsilon$, pour des valeurs de n assez grandes $(n > N)$ d'après ce qui précède et puisque la probabilité de l'inégalité $|X - X_n| < \eta$ tend vers l'unité quand n croît indéfiniment. Le concours de ces trois évènements a donc pour $n > N$ une probabilité supérieure à $1 - 3\varepsilon$. Alors la probabilité que

$$|v(X) - v(X_n)| < \omega$$

est à fortiori supérieure à $1 - 3\varepsilon$. Finalement, il est démontré que : *si $v(x)$ est une fonction continue de x et si X_n est une variable aléatoire qui tend « en probabilité » vers la variable aléatoire X, $v(X_n)$ est une variable aléatoire qui tend « en probabilité » vers la variable aléatoire $v(X)$.*

Cas de plusieurs variables.

Définition. Un point aléatoire est un point dont la position est déterminée par le résultat d'une épreuve, ce résultat étant lui-même déterminé par le hasard. Nous dirons qu'une suite de points $M_1, M_2, \ldots$ tend « en probabilité » vers un point M, si l'on a

$$\lim_{n \to \infty} P_n(\varepsilon) = 0$$

en désignant par $P_n(\varepsilon)$ la probabilité que la distance $M_n M \geq \varepsilon$.

Théorème. La condition nécessaire et suffisante pour que le point aléatoire M_n converge « en probabilité » vers le point aléatoire M est que chacune des coordonnées de M_n converge « en probabilité » vers la coordonnée correspondante de M.

Supposons, par exemple, que M_n et M restent dans un plan. Soient X_n, Y_n, les coordonnées de M_n, X, Y celle de M. On a $|X_n - X| \leq M_n M$ et $|Y_n - Y| \leq M_n M$. Donc la probabilité que $M_n M \geq \varepsilon$ est au moins égale à la probabilité que $|X_n - X| \geq \varepsilon$. Or si M_n tend « en probabilité » vers M, la 1re prob. tend vers zéro, donc l'autre aussi, donc X_n tend vers X, « en probabilité », et de même Y_n tend vers Y « en probabilité ». D'autre part, soient $p_n(\varepsilon)$, $p'_n(\eta)$ les probabilités respectives que $|X_n - X| \geq \varepsilon$, $|Y_n - Y| \geq \eta$. On a $M_n M \leq |X_n - X| + |Y_n - Y|$. Donc la probabilité que $M_n M \geq \varepsilon + \eta$ est au plus égale à la probabilité que $|X_n - X| + |Y_n - Y| \geq \varepsilon + \eta$; et celle-ci est au plus égale d'après la page 13, à $p_n(\varepsilon) + p'_n(\eta)$. Donc, si X_n et Y_n convergent « en probabilité » vers X et Y, M_n converge « en probabilité » vers M.

Il est clair que le raisonnement s'étendrait immédiatement au cas où M, M_n seraient deux points d'un même espace cartésien à un nombre fini quelconque de dimensions.

Lemme. Soient O un point fixe, M et M_n deux points aléatoires, M_n convergeant « en probabilité » vers M ; posons

$$q(R) = \text{Pr. } [OM < R] \; ; \; q_n(R) = \text{Pr. } [OM_n < R]$$

Alors pour tout $\varepsilon < 0$, il y a un nombre ρ indépendant de n tel qu'on ait à la fois

$$q(\rho) > 1 - \varepsilon \quad , \quad q_n(\rho) > 1 - \varepsilon$$

quel que soit n.

Il suffit, pour le voir, d'observer que $O\,M$ et $O\,M_n$ sont deux valeurs aléatoires et d'appliquer le lemme de la page 25 en posant $X = O\,M$, $X_n = O\,M_n$, $t = R$, $B = \rho$.

Théorème : Si $w(x, y)$ est une fonction continue de l'ensemble des variables x, y et si X_n, Y_n sont deux variables aléatoires qui tendent « en probabilité » la première vers X, la seconde vers Y, alors $w(X_n, Y_n)$ est une variable aléatoire qui converge « en probabilité » vers la variable aléatoire $w(X, Y)$.

Il suffit de refaire le raisonnement détaillé pour une variable en prenant ici comme variable le point aléatoire M_n de coordonnées X_n, Y_n, et en considérant $w(X, Y)$ comme une fonction $u(M)$ du point aléatoire M de coordonnées X, Y.

Remarques. — 1° Il est clair que la démonstration et le résultat précédents s'étendent à un nombre fini quelconque de variables.

2° Si les nombres aléatoires X et X_n restent compris entre deux nombres fixes et s'il en est de même de Y et Y_n, le théorème restera exact quand la continuité de $w(x, y)$ n'est admise que dans le rectangle correspondant.

3° Si X, Y sont des nombres certains, il suffit, pour assurer le dernier résultat énoncé de supposer que $w(x, y)$ est continue au seul point (X, Y). Ce cas particulier a été déjà énoncé et démontré par M. CANTELLI.

Valeur moyenne d'une fonction.

On va étudier la suite des valeurs moyennes d'une certaine fonction de x : $\varphi(x)$ lorsqu'on y remplace x par une variable aléatoire X_n qui convergera « en probabilité » vers la variable aléatoire X.

Il paraît naturel de prévoir qu'on n'arrivera à des résultats simples que si cette fonction elle-même est simple. Il est remarquable qu'en réalité, on puisse, pour y arriver n'assujettir $\varphi(x)$ qu'à des conditions très générales : il nous suffira, dans ce qui suit, *de supposer que* $\varphi(x)$ *est continue :*

Désignons par $\overline{Y}$ la valeur moyenne, d'une variable aléatoire Y. Par définition de la valeur moyenne

$$\overline{\varphi(X_n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, d\, F_n(x) .$$

Montrons d'abord que si a, b sont des points de continuité de $\varphi(x)$, on a

$$\int_a^b \varphi(x)\, d\, F(x) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b \varphi(x)\, d\, F_n(x) . \tag{10}$$

Or, puisque la variation totale de $F_n(x)$ est égale à l'unité, on a

$$\int_a^b \varphi(x)\, d\, F_n(x) = \Sigma\, \varphi(x_i) \left[F(x_{i+1}) - F_n(x_i) \right] + \theta_n\, \Omega ,$$

en désignant par Ω l'oscillation de $\varphi(x)$ dans un intervalle de longueur δ égale au plus grand des intervalles (x_i, x_{i+1}) et en prenant $|\theta_n| \leq 1$.

Si on prend les x_i parmi les points de continuité communs aux F_n et à F, les $F_n(x_i)$ tendent vers les $F(x_i)$ quand, les x_i restant fixes, n croît indéfiniment. Or on a une égalité analogue pour $\int_a^b \varphi(x)\, d\, F(x)$ et on peut prendre Ω aussi petit que l'on veut.

L'égalité (10) est donc bien établie.

.— Considérons maintenant, d'abord, le cas simple où X et les X_n sont uniformément bornés, c'est-à-dire où il existe deux nombres fixes A, B entre lesquels X et X_n doivent rester compris quelle que soit l'épreuve qui les détermine et quel que soit le rang n. Alors $F(x)$ est constant en dehors de (A, B).

Par définition, la valeur moyenne $\overline{\varphi(X)}$ de la valeur aléatoire $\varphi(X)$ est égale à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, d\, F(x) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b \varphi(x)\, d\, F(x) .$$

Puisque l'intégrale du second membre est constante quand $a < A$ et $b > B$ on aura, sous ces hypothèses

$$\overline{\varphi(X)} = \int_a^b \varphi(x)\, d\, F(x) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b \varphi(x)\, d\, F_n(x) = \lim_{n \to \infty} \overline{\varphi(X_n)}.$$

Ainsi, $\varphi(x)$ étant une fonction continue à arbitraire il suffit que X et X_n soient uniformément bornés pour que, lorsque X_n tend « en probabilité » vers X, la valeur moyenne de $\varphi(X_n)$ tende vers la valeur moyenne de $\varphi(X)$.

.— Considérons le cas général où X et les X_n ne sont pas uniformément bornés.

En continuant à supposer que $\varphi(x)$ est une fonction continue il est clair qu'on ne peut avoir

$$\overline{\varphi(X)} = \lim_{n \to \infty} \overline{\varphi(X_n)}$$

pour toute suite X_n convergeant « en probabilité » vers X. En effet, pour que cette relation soit exacte, il faut au moins qu'elle ait un sens. Si l'on suppose que $\overline{\varphi(X)}$ soit finie, il faut donc au moins supposer qu'à partir d'un certain rang n, $\overline{\varphi(X_n)}$ ait une valeur finie bien déterminée. C'est-à-dire que

$$\int_a^b \varphi(x)\, d\, F_n(x)$$

converge, pour chaque valeur fixe de n, vers une limite bien déterminée quand a et b tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$. C'est ce qui a lieu nécessairement dans le cas que nous venons d'examiner, où X_n restant borné, $F_n(x)$ est constant pour $|x|$ assez grand. Mais dans le cas général, la convergence de chaque intégrale définie est une nouvelle hypothèse.

Nous allons d'abord considérer le cas où *la convergence* de

$$\int_a^b \varphi(x)\, d\, F_n(x)$$

quand n restant fixe, a et b tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$ *est uniforme*, au moins à partir d'un certain rang. C'est-à-dire que (à partir de ce N rang où cette intégrale converge), pour tout $\varepsilon > 0$, on peut déterminer A et B tels que

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\, d\, F_n(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, d\, F_n(x) \right| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad a < A \quad \text{et} \quad b > B,$$

A et B restant indépendant de n.

Puisqu'on suppose $\varphi(X)$ fini, on peut supposer A et B assez grands pour qu'on ait aussi

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\, d\, F(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, d\, F(x) \right| < \varepsilon$$

pour $a < A$ et $b > B$. Or, d'après ce qui précède, lorsque l'on a ainsi fixé a et b il y a aussi un rang N' tel que

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\, d\, F(x - \int_a^b \varphi(x)\, d\, F_n(x) \right| < \varepsilon.$$

On aura donc, pour $n > N + N'$

$$\left| \overline{\varphi(X)} - \overline{\varphi(X_n)} \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, d\, F(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, d\, F_n(x) \right| < 3\varepsilon.$$

c'est-à-dire

$$\overline{\varphi(X)} = \lim_{n \to \infty} \overline{\varphi(X_n)}.$$

Inversement, supposons que l'on ait

$$\overline{\varphi(X)} = \lim_{n \to \infty} \overline{\varphi(X_n)}$$

$\varphi(x)$ étant encore une fonction continue, les moyennes $\overline{\varphi(X_n)}$ étant finies à partir d'un certain rang N, ainsi que $\overline{\varphi(X)}$. A partir de ce même rang N, on peut écrire :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, d\, F_n(x) - \int_{a_0}^{b_0} \varphi(x)\, d\, F_n(x) \right| \leq$$

$$\left| \overline{\varphi(x_n)} - \overline{\varphi(x)} \right| + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, d\, F(x) - \int_{a_0}^{b_0} \varphi(x)\, d\, F(x) \right| +$$

$$+ \left| \int_{a_0}^{b_0} \varphi(x)\, d\, F(x) - \int_{a_0}^{b_0} \varphi(x)\, d\, F_n(x) \right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On peut prendre N', a_0, b_0 de sorte que les deux premiers termes du second membre soient $< \dfrac{\varepsilon}{3}$ pour $n > N' > N$.

Mais, a_0 et b_0 étant ainsi choisis, on pourra prendre $N'' > N'$, de sorte que le dernier terme du second membre soit $< \frac{\varepsilon}{3}$. De sorte qu'en prenant $N''' = N + N'$, le premier membre sera, pour un choix particulier de valeurs de a_0 et b_0, inférieur à ε pour $n > N'''$. D'autre part, il est clair qu'à partir du rang N (depuis lequel $\varphi(X_n)$ est fini) on peut déterminer des nombres a_n, b_n tels que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, d\, F_n(x) - \int_{a_n}^{b_n} \varphi(x)\, d\, F_n(x) \right| < \varepsilon .$$

Soient maintenant, A un nombre inférieur à a_0, $a_{N+1}, \ldots a_{N'''}$ et B un nombre supérieur à b_0, $b_{N+1}, \ldots b_{N'''}$. Si nous faisons maintenant *sur* $\varphi(x)$ *une nouvelle hypothèse*, à savoir que $\varphi(x)$ est constamment ≥ 0, nous voyons qu'on aura

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, d\, F_n(x) - \int_{a}^{b} \varphi(x)\, d\, F_n(x) \right| < \varepsilon .$$

à partir d'un rang N *indépendant* de ε, pour $a < A$ et $b > B$. Autrement dit, il est prouvé que si $\varphi(x) \geq 0$, la condition de l'uniformité de la convergence de $\int_a^b \varphi(x)\, d\, F_n(x)$ vers $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, d\, F_n(x)$ est non seulement suffisante mais *nécessaire* pour assurer l'égalité

$$\overline{\varphi(X)} = \lim_{n \to \infty} \overline{\varphi(X_n)} .$$

Dans le cas où $\varphi(x)$ ne serait pas constamment positif ou nul, la condition serait encore nécessaire si l'on supposait qu'on ait non seulement la dernière égalité, mais encore

$$\left| \overline{\varphi(X)} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \overline{\varphi(X_n)} \right| .$$

En effet, si $\varphi(x)$ est continue, $|\varphi(x)|$ aussi ; il y aurait donc d'après ce qui précède uniformité de la convergence des intégrales $\int_a^b |\varphi(x)|\, d\, F_n(x)$ et par suite a fortiori uniformité de la convergence des intégrales $\int_b^a \varphi(x)\, d\, F_n(x)$.

Remarque. Dans le cas où $\varphi(x)$ reste constamment positif ou nul, si la convergence des intégrales n'a pas lieu uniformément, on peut cependant donner une indication sur la suite des $\overline{\varphi(X_n)}$, connaissant seulement $\overline{\varphi(X)}$. En effet, on a

$$\overline{\varphi(X_n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, d\, F_n(x) \geq \int_a^b \varphi(x)\, d\, F_n(x) .$$

Or quand a et b sont deux nombres arbitraires fixes, le dernier terme tend vers $\int_a^b \varphi(x)\, d\,F(x)$. Si donc $\overline{\omega}$ est la plus petite des limites de $\overline{\varphi(X_n)}$ quand n croît indéfiniment, on aura quels que soient a et b

$$\overline{\omega} \geq \int_a^b \varphi(x)\, d\,F(x)$$

et par suite

$$\overline{\omega} \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, d\,F(x)\,.$$

Ainsi, lorsque $\varphi(x)$ reste ≥ 0, $\overline{\varphi(X)}$ est inférieure ou égale à la plus petite des limites, pour n infini, de $\overline{\varphi(X_n)}$. En particulier, si l'on connaît la suite des $\overline{\varphi(X_n)}$ sans connaître $\overline{\varphi(X)}$, cette proposition permet de conclure que $\overline{\varphi(X)}$ ne peut être infinie que si la suite des $\overline{\varphi(X_n)}$ tend vers l'infini (par valeur finies ou non).

Application. On appelle *moment d'ordre* $r\ (>0)$ d'une valeur aléatoire X la valeur moyenne $m^{(r)} = \overline{X^r}$ de la puissance d'ordre r de X. Nous appellerons *écart moyen* d'ordre $r\ (>0)$ de deux variables aléatoires X, Y, la racine d'ordre r, $\lambda^{(r)} = \sqrt[r]{\mu^{(r)}}$ du moment d'ordre r de $|X - Y|$.

Si w est un nombre certain, le moment d'ordre r de $|X - w|$ est la valeur moyenne d'une fonction $\varphi(X)$ où $\varphi(x) = |x - w|^r$ est une fonction continue, et ≥ 0. On peut donc lui appliquer les propositions précédentes.

Si $X_1, X_2, \ldots$ est une suite de variables aléatoires qui tend « en probabilité » vers la variable aléatoire X, et si w est un nombre certain, la condition nécessaire et suffisante pour que l'écart moyen d'ordre r de X_n avec w tend vers l'écart moyen d'ordre r de X avec w est que la convergence de

$$\int_a^b |x - w|^r\, d\,F_n(x)$$

vers la valeur moyenne de $|X - w|^r$ (quand, r restant fixe, a et b tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$) soit uniforme quand n varie.

Cette condition d'uniformité de la convergence des intégrales, sera, en particulier, remplie quand X_n et X sont uniformément bornés.

On retrouve ici les propositions énoncées dans notre note aux « C. R. » du premier semestre 1929, propositions qui ont été étendues dans le présent mémoire aux fonctions continues $\varphi(x)$ quelconques.

.— Il est bon de montrer par un exemple que si une suite de nombres aléatoires X_n converge « en probabilité » vers un nombre aléatoire X, l'écart moyen d'ordre r de X_n avec w ne converge pas nécessairement vers celui de X avec w.

Considérons une catégorie d'épreuves dans chacune desquelles se produise nécessairement un et un seul des évènements incompatibles $E_1, E_2, \dots E_n, \dots$ dont les probabilités respectives sont $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots \frac{1}{2^n}, \dots$

Appelons X_n la variable aléatoire qui est égal au nombre α_n si l'évènement E_n se produit et à 0 dans le cas contraire ; et supposons que α_n soit un nombre supérieur à l'unité quel que soit n.

Alors la suite $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ converge « en probabilité » vers le nombre certain X égal à zéro. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il y aura une valeur N tel que $\alpha_n - 0 > \varepsilon$ pour $n \geq N$. Comme $X_n - X = 0$ ou X_n, la probabilité que $|X_n - X| \geq \varepsilon$ est zéro si $\alpha_n < \varepsilon$ et sinon c'est la probabilité de E_n soit $\frac{1}{2^n}$: elle tend dans tous les cas vers zéro quand n croît indéfiniment.

Prenons $r = 1$. L'écart moyen d'ordre 1, μ, de X avec l'unité est égal à 1. L'écart moyen d'ordre 1 de X_n avec l'unité est

$$\mu_n = \frac{|\alpha_n - 1|}{2^n} + |0 - 1| \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{\alpha_n - 2}{2^n} + 1$$

Prenons, par exemple, $\alpha_n = 2$. Alors $\lim_{n \to \infty} \mu_n = 1 = \mu$.

Mais nous pouvons prendre par exemple $\alpha_n = 2 + 2^n$, alors on aura

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n = 2 \neq \mu$$

Nous pouvons aussi prendre $\alpha_n = 2 + 4^n$, et alors

$$\mu_n = 1 + 2^n \to \infty \neq \mu .$$

Nous pouvons enfin prendre $\alpha_n = 2 + [2 + (-1)^n] 2^n$, et alors $\mu_n = 3 + (-1)^n =$ alternativement 2 et 4 de sorte que la suite des μ_n n'est pas convergente.

Application. L'écart moyen $\lambda_n^{(r)}$ d'ordre r du nombre aléatoire X_n avec le nombre aléatoire X n'est autre que l'écart moyen d'ordre r de $X_n - X$ avec le nombre certain zéro.

Par conséquent, d'après la généralisation connue de l'inégalité de BIENAYMÉ, la probabilité $P_n(\varepsilon)$ pour que $|X_n - X| \geq \varepsilon$ est $\leq \left[\frac{\lambda_n^{(r)}}{\varepsilon}\right]^r$. Il en résulte que *si pour une valeur au moins du nombre positif r, la suite des écarts moyens $\lambda_n^{(r)}$ d'ordre r des X_n et X tend vers zéro, le nombre aléatoire X_n converge « en probabilité » vers le nombre aléatoire X.*

La réciproque n'est pas exacte dans le cas le plus général. Il suffit de reprendre l'exemple de la page 33, en prenant $\alpha_n = 2^{(2^n)}$. On voit alors que X_n converge probablement vers $X = 0$ et pourtant pour chaque valeur positive de r, l'écart moyen d'ordre r de X_n et X, soit $\lambda_n^{(r)} = 2^{\left(2^n - \frac{n}{r}\right)}$ croît indéfiniment avec n.

On pourra d'ailleurs déterminer exactement le cas le plus général où la réciproque est exacte en appliquant les résultats obtenus plus haut p. 33 après substitution de $X_n - X$ à X_n et de zéro à X. On voit alors que :

si une suite de variables aléatoires X_n converge « en probabilité » vers la variable aléatoire X, la condition nécessaire et suffisante pour que l'écart moyen d'ordre r de X_n et X converge vers zéro quand n croît indéfiniment est que la convergence de l'intégrale $\int_0^A t^r \, d\, q_n(t)$ (vers la valeur moyenne de $|X_n - X|^r$ quand A croît indéfiniment) soit uniforme quand n varie (au moins à partir d'un certain rang n). (Ici $q_n(t)$ désigne la probabilité pour que $|X_n - X| < t$).

La condition sera en particulier réalisée lorsque, au moins à partir d'un certain rang, les $|X_n|$ et $|X|$ — ou tout au moins les $|X_n - X|$ — restent inférieures à un même nombre fixe. Mais elle le sera encore dans des cas plus étendus.

Remarque. — Ce qui précède montre que l'écart moyen d'un ordre r quelconque, mais déterminé, de deux nombres aléatoires X, Y, jouit vis-à-vis de la « convergence en probabilité » de Y vers X de plusieurs des propriétés de la distance de deux points x, y relativement à la convergence du point y vers le point x.

Si X et Y sont « presque toujours » égaux, leur écart moyen d'ordre r, qu'on peut mettre sous la forme

$$\sqrt[r]{\int_0^{+\infty} t^r \, d\, q\,(t)}$$

où $q(t) = 1$ pour $t > 0$, est évidemment nul. Réciproquement, s'il

est nul, $q(t)$ doit être égal à un pour $t > 0$: X et Y sont « presque toujours » égaux.

Si l'écart moyen d'ordre r de X et X_n converge vers zéro avec $\frac{1}{n}$, X_n converge « en probabilité » vers X.

Si X_n converge « en probabilité » vers X et si l'intégrale dont la limite permet de calculer cet écart moyen $\lambda_n^{(r)}$ a une convergence uniforme ou plus simplement si les X_n sont bornés, alors cet écart moyen tend vers zéro.

Toutefois, nous voyons qu'il y a là une restriction qui nous empêche de déterminer s'il y a ou non convergence « en probabilité » de X_n vers X, moyennant la seule connaissance de leur écart moyen d'un certain ordre r ou même si l'on connaît leurs écarts moyens de tous les ordres.

C'est là un défaut grave de la notion d'écart moyen. Nous allons donner maintenant une définition de la « distance » de deux variables aléatoires, qui échappe à ce défaut.

Distance de deux variables aléatoires.

Espace des variables aléatoires. — Nous sommes alors conduits à profiter une fois de plus de l'avantage qui consiste à avoir démontré, une fois pour toutes, une série de propriétés d'une famille d'espaces abstraits. On pourra étendre, ensuite d'un coup et sans nouveau raisonnement, toutes ces propriétés, à des espaces d'une nature déterminée si l'on peut prouver qu'ils appartiennent à cette famille.

Nous pouvons considérer toutes les variables aléatoires X qu'on peut définir dans une certaine catégorie d'épreuves comme autant de « points » d'un certain espace. Et nous dirons qu'une suite de points $X_1, X_2, \ldots$ de cet espace converge vers le point X de cet espace quand la variable aléatoire X_n tend « en probabilité» vers la variable aléatoire X. Seulement, pour que l'unicité de la limite subsiste, nous sommes amenés à considérer comme « *points* » *non distincts*, deux points représentés par deux variables aléatoires qui sont « presque toujours » égales (*).

Pour justifier cette façon de voir, nous devrons encore démontrer que si, quel que soit n, les nombres aléatoires X_n et Y_n sont

(*) On rencontre ici une conception analogue à celle qui consiste à considérer deux fonctions mesurables comme non distinctes lorsqu'elles sont égales « presque partout ».

« presque toujours » égaux, 1° la suite des X_n et celle des Y_n convergent « en probabilité » toutes deux ou aucune des deux ; 2° dans le premier cas, leurs limites « en probabilité » sont « presque toujours » égales.

Supposons que X_n converge « en probabilité » vers X, alors ε, η étant deux nombres positifs donnés, il y a un entier N tel que la probabilité que $|X_n - X| \geq \eta$ soit $< \varepsilon$ pour $n > N$. Comme il y a une probabilité nulle que $|X_n - Y_n| > 0$ et comme $X - Y_n = (X - X_n) + (X_n - Y_n)$ alors, en vertu du lemme de la page 9, la probabilité que $|X - Y_n| > \eta$ est $< \varepsilon$ pour $n > N$. Donc, Y_n tend « en probabilité » vers X. Et si Y_n tend « en probabilité » vers Y, Y est, comme nous l'avons vu page 12, « presque toujours » égal à X.

Il serait utile de démontrer que l'espace des variables aléatoires est un espace (L) (E. A., p. 163) (*), c'est-à-dire ici que :

si une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ est formée de variables « presque toujours » égales à la variable aléatoire X, cette suite converge « en probabilité » vers X ;

si une suite de variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots$ converge « en probabilité » vers la variable aléatoire Y, il en est de même de toute suite extraite de la suite des Y_n.

La démonstration directe de ces deux propriétés ne donnerait aucune peine, mais elle va résulter indirectement de la propriété suivante : *l'espace des variables aléatoires est « distanciable »* (E. A., p. 61).

Il s'agit de prouver *qu'on peut associer à tout couple X, Y de variables aléatoires, un nombre $(X, Y) = (Y, X) > 0$, nombre qu'on appellera « distance » de X et de Y et qui devra satisfaire aux conditions suivantes :*

si X et Y sont « presque toujours » égaux, leur « distance » est nulle et inversement

si X_n tend « en probabilité » vers X, leur « distance » (X_n, X) tend vers zéro et inversement

si X, Y, Z sont trois variables aléatoires quelconques, leurs « distances » vérifient « l'inégalité triangulaire »

$$(X, Y) \leq (X, Z) + (Z, Y).$$

(*) Dans la suite, je renverrai encore pour plusieurs définitions et théorèmes à mon livre *Les espaces abstraits...* (Gauthier-Villars, 1928) en le désignant par l'abréviation E. A.

Tout espace distanciable est un espace (L), mais nous avons montré (E. A., p. 162) que la réciproque n'est pas vraie et que les espaces distanciables jouissent de propriétés importantes qui n'appartiennent pas à tous les espaces (L), de sorte qu'il y a utilité à établir les dernières propositions en italiques.

.— Du moment qu'on aura défini une distance (X, Y), on pourra en donner une infinité d'autres définitions vérifiant les mêmes conditions, mais fournissant des valeurs numériquement différentes des précédentes. Il serait intéressant de chercher la plus simple. Mais cela n'a aucune importance au point de vue de l'utilisation des propriétés générales des espaces distanciables, l'existence d'une distance et non la forme de son expression, étant alors le seul fait qui importe. Nous nous contenterons donc de donner *une* définition de la distance, laissant ouverte la question d'en trouver une plus simple.

Généralisant notre définition de la « distance » de deux fonctions mesurables, *nous appellerons distance* (X, Y) *de deux variables aléatoires*, la borne inférieure quand ε varie, de la somme $(X, Y)_\varepsilon + \varepsilon$ où ε est un nombre positif arbitraire et où on a désigné par $(X, Y)_\varepsilon$ la probabilité que $|X - Y| \geq \varepsilon$.

On a évidemment $(X, Y) = (Y, X) \geq 0$.

1° Si X et Y sont « presque toujours » égaux, $(X, Y)_\varepsilon = 0$ et la borne inférieure (X, Y) de $(X, Y)_\varepsilon + \varepsilon$ est bien nulle. Pour démontrer la réciproque et les autres conditions, il nous sera utile de faire une remarque :

Si $(X, Y) < \delta$, *alors* $(X, Y)_\delta < \delta$. Car il y aura ε positif tel que $\varepsilon + (X, Y) < \delta$, d'où $\varepsilon < \delta$ et $(X, Y)_\varepsilon < \varepsilon$. Comme $\varepsilon < \delta$, la probabilité que $|X - Y| \geq \delta$ est au plus égale à la probabilité que $|X - Y| \geq \varepsilon$: on a bien $(X, Y)_\delta < \delta$.

2° Si X_n tend « en probabilité » vers X et si ε et η sont des nombres positifs arbitraires, il y a N tel que $(X_n, X)_\varepsilon < \eta$ pour $n > N$. D'où :

$$(X_n, X) \leq \varepsilon + (X_n, X) < \varepsilon + \eta \text{ , pour } n > N .$$

Comme ε, η sont arbitraires, on a bien

$$\lim_{n \to \infty} (X_n, X) = 0 .$$

Réciproquement, démontrons que si la distance (Y_n, Y) tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, Y_n tend « en probabilité » vers zéro. Soient ε,

η, ω trois nombres positifs arbitraires. Il existe un nombre N, tel que $(Y_n, Y) < \omega$ pour $n > N$. Alors comme on l'a vu $(Y_n, Y)_\omega < \omega$ pour $n > N$. Prenons $\omega < \varepsilon$ et $\omega < \eta$, alors

$$(Y_n, Y)_\eta \leq (Y_n, Y)_\omega < \omega < \varepsilon ;$$

la probabilité que $|Y_n - Y| \geq \eta$ est donc $< \varepsilon$ pour $n > N$. Ainsi Y_n tend « en probabilité » vers Y.

3° On a : $$Y - Z = (Y - X) + (X - Z) .$$

D'après le lemme de la page 9, on a donc, quel que soit le nombre positif ε :

$$(Y, Z)_{\varepsilon+\eta} \leq (Y, X)_\varepsilon + (Z, X)_\eta$$

d'où :

$$\varepsilon + \eta + (Y, Z)_{\varepsilon+\eta} \leq [\varepsilon + (Y, X)_\varepsilon] + [\eta + (Z, X)_\eta] .$$

On peut prendre ε, η de sorte que les deux crochets soient aussi voisins qu'on voudra de (Y, X) et de (Z, X) respectivement. On peut donc prendre $\omega = \varepsilon + \eta$ de sorte que $\omega + (Y, Z)_\omega$ soit au plus égale à une quantité aussi voisine qu'on voudra de $(Y, X) + (Z, X)$.

D'où résulte

$$(Y, Z) \leq (Y, X) + (X, Z) .$$

Si T est un autre nombre aléatoire, on aura de même $(X, Z) \leq$ $\leq (X, T) + (T, Z)$ d'où $(Y, Z) - (X, T) \leq (Y, X) + (Z, T)$. Par suite, en permutant Y avec T et Z avec X, on voit que

$$|(Y, Z) - (X, T)| \leq (Y, X) + (Z, T) .$$

En particulier, on en conclut que *la distance* (Y, Z) *de deux nombres aléatoires,* Y, Z, *n'est pas altérée quand on remplace ceux-ci par des nombres aléatoires* X, T *qui leurs sont respectivement « presque toujours » égaux*. Car on a vu que, dans ce cas, le second membre est nul.

.— Des propriétés qui définissent la distance, on déduit immédiatement aussi que

si les termes d'une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ *sont « presque toujours » égaux à la variable aléatoire* X, *cette suite converge « en probabilité » vers* X ;

si une suite de nombres aléatoires X_n *converge « en probabilité » vers un nombre aléatoire* X, *toute suite extraite de la première converge aussi « en probabilité » vers le même nombre aléatoire* X.

On en déduit aussi que si (X, X_n) et (X_n, Y_n) tendent vers zéro, il en est de même de (X, Y_n). Autrement dit : *si le nombre aléatoire X_n tend « en probabilité » vers le nombre aléatoire X et si la probabilité que $|X_n - Y_n| \geq \varepsilon$ tend vers zéro pour toute valeur positive de ε, alors le nombre aléatoire Y_n tend aussi « en probabilité » vers X.*

Ces deux propositions établies directement par M. CANTELLI, dans le cas où X est certain, sont ici, même dans le cas général où X est aléatoire, des conséquences immédiates de l'existence d'une « distance ».

Il est utile de se faire une idée de l'*ordre de grandeur de la distance* (X, Y) Nous ferons à ce sujet plusieurs remarques.

1° La distance de deux nombres aléatoires n'est jamais supérieure à l'unité. En effet, si l'on avait $(X, Y) = 1 + a$ avec $a > 0$, on aurait en prenant ε tel que $0 < \varepsilon < a$

$$1 + a = (X, Y) \leq \varepsilon + (X, Y)_\varepsilon \leq \varepsilon + 1$$

d'où, $a \leq \varepsilon$ contrairement à l'hypothèse.

2° Si la différence de deux nombres aléatoires X, Y est un nombre certain A, leur distance est égale au plus petit des deux nombres $|A|$ et 1.

En effet si $\varepsilon \leq |A|$, $\quad \varepsilon + (X, Y)_\varepsilon = \varepsilon + 1$

si $\varepsilon > |A|$, $\quad \varepsilon + (X, Y)_\varepsilon = \varepsilon$.

Or la borne inférieure de la première quantité est 1 et celle de la seconde est $|A|$. Ceci montre en outre que non seulement $(X, Y) \leq 1$ quand X et Y sont deux nombres aléatoires quelconques, mais que cette borne supérieure est atteinte, et même qu'en choisissant convenablement X et Y,on peut donner à (X, Y) toute valeur donnée ≥ 0 et ≤ 1.

3° Soit $\lambda^{(r)}$ l'écart moyen d'ordre r de deux nombres aléatoires quelconques X et Y. C'est aussi l'écart moyen d'ordre r de $X - Y$ avec zéro et, par suite de la généralisation connue de l'inégalité de BIENAYMÉ, on a :

$$(X, Y)_\varepsilon \leq \left[\frac{\lambda^{(r)}}{\varepsilon}\right]^r \qquad \text{d'où :}$$

$$(X, Y) \leq \varepsilon + \left[\frac{\lambda^{(r)}}{\varepsilon}\right]^r.$$

Le second membre atteint son minimum — quand ε, positif, varie — pour $\varepsilon = \left[r [\lambda^{(r)}]^r \right]^{\frac{1}{r+1}}$. Donc :

$$(X, Y) \leq \frac{r+1}{r^{\frac{r}{r+1}}} [\lambda^{(r)}]^{\frac{r}{r+1}} \quad \text{ou plus explicitement}$$

$$(X, Y) \leq \left(1 + \frac{1}{r}\right) r^{\frac{1}{r+1}} \left\{ \overline{|X - Y|^r} \right\}^{\frac{1}{r+1}}.$$ En particulier si σ et μ sont les écarts d'ordre 1 et 2, $(X, Y) \leq 2\sqrt{\sigma}$; $(X, Y) \leq \frac{3}{2} \sqrt[3]{2\mu^2}$

Ceci montre en passant que si l'écart moyen d'au moins un ordre r (> 0) de X et de X_n tend vers zéro pour r fixe quand n croît indéfiniment, la distance (X, X_n) tend vers zéro et X_n tend « en probabilité » vers X. Ce résultat a été déjà établi plus haut (p. 34) et nous avons montré que la réciproque n'avait pas lieu dans le cas le plus général.

4° Nous avons vu que si $|X - Y|$ ne dépasse pas un nombre certain A, alors l'écart moyen d'ordre r, $\lambda^{(r)}$, de X et de Y tend vers zéro quand (X, Y) tend vers zéro. Il paraît alors naturel de chercher si on ne pourrait trouver une borne supérieure de $\lambda^{(r)}$ connaissant A et (X, Y).

Or s'il existe un nombre certain B tel que $|X - Y| < B$, on a, en désignant par $q(t)$ la probabilité que $|X - Y| < t$, $q(t) = 1$ pour $t \geq B$, d'où

$$[\lambda^{(r)}]^r = \int_0^B t^r \, d\, q(t) = \int_0^\varepsilon t^r \, d\, q(t) + \int_\varepsilon^B t^r \, d\, q(t)$$

$$\leq \varepsilon^r + B^r P(\varepsilon) \leq [\varepsilon + P(\varepsilon)]^r + B^r [\varepsilon + P(\varepsilon)],$$

où $P(\varepsilon)$ est la probabilité que $|X - Y| \geq \varepsilon$.

Posons $\Delta = (X, Y)$; c'est la borne inférieure de $[\varepsilon + P(\varepsilon)]$. On aura donc

$$\lambda^{(r)} \leq \sqrt[r]{\Delta^r + B^r \Delta}$$

S'il existe un nombre certain A tel que $|X - Y| \leq A$, on pourra dans la dernière inégalité faire tendre B vers A, de sorte que finalement :

$$\lambda^{(r)} \leq \sqrt[r]{(X, Y)^r + A^r (X, Y)}.$$

On voit bien que si, A restant fixe, (X, Y) tend vers zéro, il en sera de même de $\lambda^{(r)}$.

5° Si l'on a toujours $|X - Y| \leq |Z - T|$, on a $(X, Y) \leq (Z, T)$.

Car $(X, Y)_\varepsilon \leq (Z, T)_\varepsilon$ pour toute valeur positive de ε. Or (X, Y) et (Z, T) sont les bornes inférieures, quand ε varie, de

$$\varepsilon + (X, Y)_\varepsilon \qquad \text{et de} \qquad \varepsilon + (Z, T)_\varepsilon .$$

.— Nous allons maintenant montrer que l'espace des variables aléatoires est complet (E. A., p. 74). Plus précisément, nous allons montrer que *dans cet espace le critère de convergence de* CAUCHY *est valable*. D'abord, comme dans tout espace distancié, si la suite des points abstraits X_n est convergente, alors pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $(X_n, X_{n+p}) < \varepsilon$ pour p arbitraire et $n > N$. Réciproquement, si cette condition est remplie, on a $(X_n, X_{n+p})_\varepsilon < \varepsilon$ pour $n > N$. Prenons pour ε la valeur $\varepsilon_r = \frac{\omega}{2^r}$, il y aura N_r tel que $(X_n, X_{n+p})_{\varepsilon_r} < \varepsilon_r$ pour $n > N_r - 1$; on peut supposer que les N_r vont en croissant et tendent vers l'infini. Posons $Y_r = X_{N_r}$. Alors la probabilité que $|Y_r - Y_{r+1}| \geq \varepsilon_r$ est $< \varepsilon_r$; la probabilité qu'on ait $|Y_r - Y_{r+1}| \geq \varepsilon_r$ ou $|Y_{r+2} - Y| \geq \varepsilon_{r+1}, \ldots$ ou $|Y_{r+q} - Y_{r+q+1}| \geq \varepsilon_{r+q}, \ldots$ est inférieure à $\varepsilon_r + \varepsilon_{r+1} + \ldots = \varepsilon_{r-1}$. La probabilité qu'on ait à la fois

$$(1) \qquad |Y_r - Y_{r+1}| < \varepsilon_r, \ldots |Y_{r+q} - Y_{r+q+1}| < \varepsilon_{r+q}, \ldots$$

est donc supérieure à $1 - \varepsilon_{r-1}$. Or, si ces inégalités ont lieu à la fois pour une épreuve déterminée, la série

$$(2) \qquad Y_1 + (Y_2 - Y_1) + \ldots + (Y_r - Y_{r-1}) + \ldots$$

converge. (Et même elle converge absolument). Donc la probabilité que cette série converge est supérieure à $1 - \frac{\omega}{2^{r-1}}$. Comme cette série est indépendante de r, on voit qu'il y a une probabilité nulle que cette série diverge (ou même ne converge pas absolument).

Nous pouvons maintenant définir une variable aléatoire X finie et bien déterminée dans chaque épreuve en la prenant égale à la somme de la série (2) — c'est-à-dire à la limite de $Y_r = X_{N_r}$ — quand les conditions (1) sont remplies à partir d'un rang arbitraire, et égale à zéro dans le cas contraire.

Pour les épreuves où les conditions (1) sont remplies, on a :

$$|Y_r - X| = \lim_{q \to \infty} |Y_r - Y_{r+q}| \leq |Y_r - Y_{r+1}| + |Y_{r+1} - Y_{r+2}| + \ldots < \varepsilon_r + \varepsilon_{r+1} + \ldots = \varepsilon_{r-1} .$$

Donc il y a une probabilité $> 1 - \varepsilon_{r-1}$ que $|Y_r - X| < \varepsilon_{r-1}$ et comme ε_{r-1} tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$, on voit que la suite des Y_r tend « en probabilité » vers X. Ainsi, de la suite des X_n, on peut tirer une suite, celle des X_{N_r} qui tend « en probabilité » vers le nombre aléatoire X. Il s'agit de prouver qu'il en est de même de la suite entière.

Or d'après ce qu'on a vu page 37, la distance (X, Y_r) tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$. Soit n un entier supérieur à N_r ; on a vu page 38, que

$$0 \leq (X, X_n) \leq (X, Y_r) + (X_{N_r}, X_n) .$$

Si l'on prend r tel que $N_r \leq n < N_{r+1}$, r tendra vers l'infini avec n et (X_{N_r}, X_n) tendra vers zéro par hypothèse ; comme il vient d'être prouvé que (X, Y_r) tend vers zéro, il en résulte finalement que (X, X_n) tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Ainsi la suite X_n tout entière tend « en probabilité » vers X.

.— Observons en passant que nous pouvons déduire des raisonnements précédents la conséquence suivante :

Lorsqu'une suite de variables aléatoires X_r tend « en probabilité » vers une variable aléatoire X, on peut extraire de cette suite, une suite de variables Y_r satisfaisant aux deux conditions suivantes : 1° *Il y a une probabilité nulle que cette suite des Y_r diverge* ; 2° *Quel que soit ε positif, il y a un évènement E_ε dont la probabilité est $> 1 - \varepsilon$ et qui est tel que dans l'ensemble des épreuves où cet évènement a lieu, la suite des Y_r converge uniformément.* (On pourrait traduire brièvement cette seconde condition en disant qu'il y a une probabilité nulle que la série des Y_r ne converge pas uniformément, mais ce serait au risque de malentendus possibles que nous avons précisés page 19. Il vaut mieux exprimer (comme à la même page) la propriété 2° en disant : la suite des Y_r converge uniformément « en probabilité »).

En effet, la suite des X_n devra d'abord satisfaire au critère de convergence de CAUCHY. On pourra donc en extraire comme plus haut la suite des Y_r. Cette suite des Y_r converge « en probabilité » vers une certaine variable Y ; et Y et X sont « presque toujours » égales, puisque ce sont à la fois les limites « en probabilité » des X_n. Soit ε_{r-2} le premier des nombres décroissants ε_1, ε_2... qui est $< \varepsilon$. Appelons E_ε l'évènement consistant dans la réalisation simultanée des inégalités

$$|Y_r - X| \leq \varepsilon_{r-1}, \ |Y_{r+1} - X| < \varepsilon_r, \ |Y_{r+2} - X| < \varepsilon_{r+1}, \ldots$$

On a vu que les probabilités de ces inégalités sont respectivement supérieures à $1-\varepsilon_{r-1}$, $1-\varepsilon_r$, ... Alors la probabilité de E_ε est $> 1-\varepsilon_{r-1}-\varepsilon_r-\varepsilon_{r+1}-\ldots = 1-\varepsilon_{r-2} > 1-\varepsilon$.

La suite des Y_r converge uniformément vers X dans l'ensemble des épreuves où se produit l'évènement E_ε. C'est-à-dire que si η est un nombre positif quelconque, il y a un entier M tel que $|Y_s - X| < \eta$, pour $s > M$, M étant le même pour toutes les épreuves où E_ε a lieu. Il suffit en effet de prendre $\varepsilon_M < \eta$.

La condition 2° est ainsi établie. Remarquons en outre que dans toutes les épreuves où l'évènement E_ε a lieu, la suite des Y_r converge. La probabilité que la suite des Y_r converge étant au moins égale à la probabilité de l'évènement E_ε, sera $> 1-\varepsilon$. La probabilité de la convergence des Y_r étant celle d'un évènement indépendant de ε sera donc égale à l'unité, ce qui établit la condition 1°.

Nous avons déjà fait observer qu'on ne peut employer le même raisonnement pour déduire de la condition 2°, énoncée sous la forme où nous l'avons démontrée, que la probabilité de l'uniformité de la convergence est égale à l'unité. Pour une épreuve déterminée, la convergence ou la divergence de la suite des X_n déterminés par cette épreuve est nettement caractérisée. Il n'en est pas de même de l'uniformité de la convergence, propriété collective et non individuelle.

Dans certains cas, la suite des Y_r se confondra avec la suite des X_n. On pourrait se demander *s'il n'en est pas toujours ainsi.* L'exemple de la page 14 montre qu'*il n'en est rien.* Cet exemple montre même qu'une suite de variables aléatoires X_n peut converger « en probabilité » vers une variable X sans jamais converger vers X au sens ordinaire, même pour une seule épreuve. (De même qu'une suite de fonctions mesurables peut converger « en mesure » vers $f(x)$ sans converger vers $f(x)$ pour aucune valeur de x).

Dans une publication récente on trouve un énoncé d'où il semblerait résulter (si je l'ai bien compris) que la suite des Y_r se confond avec la suite des X_n lorsque les deux conditions suivantes sont remplies : les valeurs moyennes de $X_n - X_{n'}$ et de $(X_n - X_{n'})^2$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{N}$ lorsque n et n' sont simultanément supérieurs à N.

D'abord, on a en général pour une variable aléatoire quelconque Y et un nombre certain λ quelconque

$$0 \leq \overline{(Y+\lambda)^2} = \overline{Y^2} + 2\lambda\,\overline{Y} + \lambda^2 .$$

D'où :

$$(\overline{Y})^2 \leq \overline{Y^2} .$$

Par suite

$$[\overline{X_n - X_{n'}}]^2 \leq \overline{(X_n - X_{n'})^2} .$$

Donc la seconde condition entraîne la première.

En vertu de la relation de la page 40

$$(X_n , X_{n'}) \leq \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}} \sqrt[3]{\overline{(X_n - X_{n'})^2}}$$

la seconde condition exprime que la condition de convergence de CAUCHY est vérifiée ; et, d'après ce qui vient d'être démontré, il existe un nombre aléatoire X qui est la limite « en probabilité » de X_n.

Pourtant, il ne serait pas exact d'affirmer que si les deux conditions citées sont remplies, il y a une probabilité égale à l'unité que X_n converge « au sens ordinaire ». D'abord, s'il en était ainsi, la limite « au sens ordinaire » de X_n serait « presque toujours » égale à X et on pourrait en modifiant X supposer égales ces limites « ordinaires » et « en probabilité ». Or, nous avons donné à page 14, un exemple d'une suite de variables aléatoires satisfaisant à la seconde — et par suite aussi à la première condition ci-dessus —, convergeant « en probabilité » vers zéro et pourtant ne convergeant jamais « au sens ordinaire » vers zéro.

Conditions pour qu'un ensemble de variables aléatoires soit compact « en probabilité ». — Nous avons depuis longtemps (E. A., p. 275) introduit la notion d'ensemble compact. Un ensemble est dit compact lorsque de chacun de ses sous-ensembles on peut extraire une suite convergente. Pour qu'un ensemble soit compact, il faut qu'il satisfasse à des conditions différentes suivant la nature des éléments de l'ensemble et suivant celle de la convergence envisagée. Nous avons obtenu ces conditions dans des cas nombreux (E. A., p. 116-123) et en particulier dans le cas de la convergence « en mesure » des fonctions mesurables (*). Le raisonnement suivi dans ce dernier cas va pouvoir être ici suivi dans ses grandes lignes avec les modifications convenables.

Lemme. Soit X une variable aléatoire. Nous supposerons que

(*) *Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables*, « Fund. Math. » t. IX, 1927, p. 25-32.

cette variable ne peut prendre que des valeurs finies (bornées ou non) de sorte que, si $F(x)$ est sa fonction de probabilité totale

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad ; \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 .$$

Soient maintenant ε et ω deux nombres arbitraires. On pourra trouver deux nombres A et B tels que

$$F(A) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad F(B) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et } A < B .$$

De sorte que la probabilité qu'on ait :

$$A < X \leq B$$

sera supérieure à $1 - \varepsilon$. Soit maintenant φ un entier tel que $\frac{B - A}{\varphi} < \omega$, et soit E_i l'évènement consistant en ce que

$$A + (i-1)\frac{B-A}{\varphi} < X \leq A + i\frac{B-A}{\varphi}$$

et e_X l'évènement consistant en ce que

$$X \leq A \qquad \text{ou} \qquad X > B .$$

On voit que l'évènement e_X a une probabilité $< \varepsilon$ et que si l'on se place dans les cas où e_X n'a pas lieu, alors X est borné et il y a un nombre fini d'évènements $E_1, E_2, \ldots E_\varphi$ qui épuisent la certitude et pour chacun desquels les valeurs de X restent comprises entre deux valeurs différant de moins de ω.

Cas d'une suite qui converge « en probabilité ». — Si on fixe les quantités ε et ω, à chaque nombre aléatoire Y correspondront de même des nombres A, B, φ et des évènements $e_Y, E_1, \ldots E_\varphi$ en nombre fini. Nous allons montrer que si l'on prend successivement pour Y les termes X_n d'une suite qui converge « en probabilité », on peut supposer que $A, B, \varphi, E_1, \ldots E_\varphi$ soient les mêmes pour tous ces termes e_Y dépendant seul de Y.

Soit X la limite « en probabilité » de X_n ; ε', ω' étant donnés, définissons d'abord comme plus haut pour X seul, mais en remplaçant ε, ω par ε', ω', les nombres A, B, φ et les évènements $E_1, \ldots E_\varphi, e_X$. Soit e''_n l'évènement consistant en ce que

$$|X - X_n| \geq \omega' .$$

On sait qu'il y a un nombre N tel que, pour $n > N$, la probabilité de e''_n soit $< \varepsilon'$.

D'autre part, définissons pour X_n comme pour X deux nombres A_n, B_n tels que la probabilité que $A_n < X_n \leq B_n$ soit $> 1 - \varepsilon'$. Puis prenons pour $A' + \omega'$ le plus petit des nombres A, A_1, ... A_N et pour $B' - \omega'$ le plus grand des nombres B, B_1, ... B_N. Alors il y a une probabilité $> 1 - \varepsilon'$ que

$$A' < X_n \leq B'$$

pour $n = 1, 2, \ldots N$. Pour $n > N$, on aura les mêmes inégalités quand on aura à la fois

$$A < X \leq B \quad \text{et} \quad |X - X_n| \leq \omega' ,$$

et le concours de ces deux évènements a une probabilité supérieure à $1 - 2\varepsilon'$.

Pour toute valeur entière de n, appelons e'_n l'évènement consistant en ce que l'on n'a pas

$$A' < X_n \leq B' .$$

Appelons enfin, lorsque $n > N$, e_n l'évènement : (e''_n ou e'_n) et posons $e_n = e'_n$ si $n \leq N$. Alors pour chaque valeur de l'entier n, on a

$$A' < X_n \leq B'$$

sauf, peut-être, lorsque se produit un évènement e_n dont la probabilité est au plus égale à $3\varepsilon'$.

Enfin prenons φ tel que $\dfrac{B' - A'}{\varphi} < \omega'$, appelons E_i l'évènement où a lieu

$$(3) \qquad A' + (i-1)\frac{B' - A'}{\varphi} < X \leq A' + i\frac{B' - A'}{\varphi}$$

et, pour $i \leq N$, $E_i^{(n)}$ l'évènement où a lieu

$$(4) \qquad A' + (i-1)\frac{B' - A'}{\varphi} < X_n \leq A' + i\frac{B' - A'}{\varphi} .$$

Soient enfin E'_1, E'_2, ... E'_φ, les évènements distincts en nombre fini du type

$$E_i\, E_j^{(1)}\, E_k^{(2)} \ldots E_l^{(N)} .$$

Quand $n \leq N$, chacun des évènements E'_h est conséquence de l'un des évènements $E^{(n)}_r$, c'est-à-dire que X_n restera quand E'_h se produit entre deux bornes différant de moins de ω'.

Quand $n > N$, si l'un des évènements E'_h a lieu sans qu'ait lieu e_n, c'est que l'un des évènements E_i a lieu sans qu'ait lieu e_n. Autrement dit, on a les inégalités (3) et (4) et l'on a

$$X - \omega' \leq X_n \leq X + \omega',$$

d'où :

$$A' + (i-1)\frac{B'-A'}{\varphi'} - \omega' < X_n \leq A' + i\frac{B'-A'}{\varphi'} + \omega'.$$

Autrement dit, X_n reste dans ces épreuves compris entre deux nombres différent de moins de $3\omega'$.

Prenons maintenant $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}$ et $\omega' = \frac{\omega}{3}$. On voit que ε et ω étant deux nombres arbitrairement fixés, on a pu déterminer des nombres A', B', φ' et des évènements en nombre fini $E'_1, \ldots E'_\varphi$, et associer à chaque nombre aléatoire X_n un évènement e_n de sorte que :

1° pour chaque valeur de n la probabilité de e_n est inférieure à ε ;

2° il y a deux bornes A', B', indépendantes de n, qui ne sont pas dépassées par X_n sauf peut-être quand e_n a lieu ;

3° pour chacun des évènements E'_h, l'oscillation de X_n reste inférieure à ω sauf peut-être quand e_n a lieu. Par analogie avec le cas des fonctions mesurables cités plus haut, nous exprimerons ces propriétés en disant que les nombres aléatoires X_n sont « *également* » « *presque* » *bornés* (propriété 1° et 2°) *et* « *également* » « *presque* » *régulièrement étalés* (propriété 1° et 3°) dans leurs champ de variation.

Cas d'un ensemble de variables aléatoires. — Supposons maintenant que ces propriétés soient possédées par un ensemble F de variables aléatoires Y. Autrement dit, nous supposons qu'à tout couple de nombres positifs ε, ω correspondent trois nombres A, B, φ, un nombre fini φ d'évènements $E_1, E_2, \ldots E_\varphi$ (qui épuisent la certitude quand $A < Y \leq B$) et un ensemble d'évènements e_Y associés respectivement aux divers nombres Y de F de sorte que :

la probabilité de e_Y est inférieure à ε ;

Y ne dépasse pas les bornes A, B sauf peut-être si e_Y se produit ;

pour chacun des évènements E_h l'oscillation de Y reste inférieure à ω tant que e_Y n'a pas lieu.

(On pourrait supposer que e_Y est précisément l'évènement consistant en ce que Y dépasse l'une des bornes A ou B).

La condition est suffisante. — Nous allons montrer que, dans ces conditions, de tout ensemble infini I de variables aléatoires distinctes appartenant à l'ensemble F on peut tirer une suite qui est convergente « en probabilité », la limite « en probabilité » de cette suite pouvant d'ailleurs, *ou non*, faire partie de F.

En effet, considérons une suite infinie de variables aléatoires distinctes appartenant à I, soient $Y_1, Y_2, \ldots Y_n \ldots$

Si $E_1 - e_{Yn}$ a lieu, c'est-à-dire si E_1 a lieu sans que e_{Yn} se produise, Y_n reste entre A et B et l'oscillation de Y_n reste inférieure à ω. Soit dans ces conditions M_n la borne supérieure des valeurs de Y quand $E_1 - e_{Yn}$ a lieu. On aura $A \leq M_n \leq B$. Donc on peut extraire de la suite des Y_n une suite telle que la suite correspondante extraite des M_n converge. Et en ne retenant de cette suite que les termes d'un rang assez grand, on pourra même supposer que dans cette suite S_1, les différences $|M_n - M_{n'}|$ sont toutes inférieures à ω. Si Y_n et $Y_{n'}$ appartiennent à cette suite, alors lorsque $E_1 - e_{Yn} - e_{Yn'}$ a lieu, $E_1 - e_{Yn}$ et $E_1 - e_{Yn'}$ ont lieu ; par suite les bornes supérieures de Y_n et $Y_{n'}$ diffèrent de moins de ω et les oscillations de Y_n et de $Y_{n'}$ sont inférieures à ω. Donc $|Y_n - Y_{n'}| < 3\,\omega$ quand $E_1 - e_{Yn} - e_{Yn'}$ a lieu. Si, maintenant, on opère sur cette suite S_1 de la même façon que sur la suite des Y_n, en faisant jouer à E_2 le rôle de E_1 on pourra extraire de S_1 une suite S_2 telle que pour deux nombres Y_n, $Y_{n'}$ de S_2, on ait $|Y_n - Y_{n'}| < 3\,\omega$ lorsque $E_2 - e_{Yn} - e_{Yn'}$ a lieu et encore aussi $E_1 - e_{Yn} - e_{Yn'}$. Et ainsi de suite. Au bout de φ opérations, on aura extrait une suite $\sigma - S_\varphi$ de variables aléatoires $Z_1, Z_2, \ldots$ appartenant à I et telles que $|Z_n - Z_{n'}| < 3\,\omega$ lorsque $E_h - e_{Zn} - e_{Zn'}$ a lieu pour $h = 1, \ldots \varphi$, c'est-à-dire dans tous les cas où e_{Zn} ni $e_{Zn'}$ n'ont lieu. Autrement dit, l'évènement $|Z_n - Z_{n'}| \geq 3\,\omega$ n'a lieu que si e_{Zn} ou $e_{Zn'}$ a lieu ; sa probabilité est inférieure à $2\,\varepsilon$. On a donc

$$(Z_n, Z_{n'}) < 3\,\omega + (Z_n, Z_{n'})_{3\omega} < 3\,\omega + 2\,\varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon = \omega = \frac{1}{5}$; on pourra extraire de I une suite infinie σ_1 telle que la « distance » de deux quelconques de ses termes soit constamment inférieure à 1 ; prenons $\varepsilon = \omega = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$, on pourra extraire de σ_1 une suite σ_2 telle que la distance de deux quelconques

de ses termes soit inférieure à $\frac{1}{2}$, etc. Soit enfin σ_0 la suite constituée du premier terme de σ_1, du second terme de σ_2, etc... Ce sera une suite infinie, extraite de I, formée de termes distincts et telle que la « distance » de deux de ses termes soit inférieure à $\frac{1}{n}$ à partir du rang n. C'est donc une suite convergente extraite de I.

La condition est nécessaire. — Je dis maintenant que si un ensemble G de nombres aléatoires X est tel que de tout ensemble infini de nombres X distincts extraits de G on puisse extraire une suite convergente « en probabilité », l'ensemble G satisfait aux conditions précédentes.

Soit d'abord ε un nombre positif arbitraire : on peut déterminer un nombre A tel que Pr. $[|X| \geq A] < \varepsilon$ pour tout X de G. En effet, dans le cas contraire pour tout entier p il y aurait au moins un élément X_p de G, tel que Pr. $[|X_p| \geq p] > \varepsilon$. De la suite des X_p on pourrait tirer une suite convergente « en probabilité ». Pour les valeurs de p correspondant à cette suite Pr. $[|X_p| \geq 1]$ tend vers zéro et à fortiori Pr. $[|X_p| \geq p]$; d'où contradiction.

Ceci étant, donnons-nous encore arbitraitement un nombre positif ω. Nous avons démontré (E. A., p. 75) que dans un espace (D) complet, si un ensemble G est compact, il n'existe qu'un nombre fini (ou nul) d'éléments de G dont les distances mutuelles soient toutes supérieures à ω. Soient donc $Y_1, Y_2, \ldots Y_r$, r éléments de G tels que tout élément de G soit à distance inférieure à ω de l'un au moins de ces r éléments.

Le raisonnement qu'on a fait pour une suite convergente « en probabilité » s'appliquerait en particulier pour la suite $Y_1, Y_2, \ldots Y_{r-1}, Y_r, Y_r, Y_r \ldots, Y_r \ldots$. Donc il existe trois nombres A', B', φ, et φ évènements, soient $E_1, E_2, \ldots E_\varphi$ tels que pour $h = 1, 2, \ldots \varphi$

$$\text{Pr. } (Y_h \leq A' \text{ ou } Y_h \geq B') < \varepsilon$$

et que l'oscillation de Y_h dans E_s soit $< \omega'$ pour $s = 1, 2, \ldots \varphi$.

Si maintenant Y est un élément quelconque de G, il y a au moins un des termes Y_h de $Y_1 \ldots Y_r$, tel que

$$(Y, Y_h) < \omega'$$

d'où

$$(Y, Y_h)_{\omega'} < \omega' \text{ ou}$$

$$\text{Pr. } [|Y - Y_h| \geq \omega'] < \omega'.$$

Soit e'_Y l'évènement $|Y - Y_h| \geq \omega'$, e_h l'évènement ($Y_h \leq A$ ou $Y_h \geq B$), e_Y l'évènement : e'_Y ou e_h. Alors si e_Y n'a pas lieu, on a

$$|Y - Y_h| < \omega' \quad \text{et} \quad A' < Y_h < B'$$

d'où :

$$A' - \omega' < Y < B' + \omega' .$$

En posant $A = A' - \omega'$ et $B = B' + \omega'$, on voit que pour tout élément Y de G, on a $A < Y < B$ sauf peut-être si e_Y a lieu. De plus, la probabilité de e_Y est inférieure ou égale à la somme des probabilités de e'_Y et e_h, soit à $\omega' + \varepsilon'$.

D'autre part, quel que soit l'entier $s \leq \varphi$, si E_s a lieu sans e_Y, l'oscillation de Y_h reste inférieure à ω' et $|Y - Y_h| < \omega'$, de sorte que l'oscillation de Y reste inférieure à $3\,\omega'$.

Soient maintenant ε et ω deux nombres positifs arbitraires. Si l'on prend $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ et ω' inférieur à $\frac{\omega}{3}$ et $\frac{\varepsilon}{2}$, la probabilité de l'évènement e_Y sera $< \varepsilon$ et l'oscillation de Y dans chaque $E_s - e_Y$ sera inférieure à ω.

En résumé, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble G de variables aléatoires soit tel que de tout ensemble infini des éléments de G on puisse extraire une suite convergeant « en probabilité », est que les variables de G soient « également » « presque » bornées et que ces variables soient « également » « presque » régulièrement étalées dans leur champ de variation.*

Paris, 12 Novembre 1929.

J. O. IRWIN, M. A., M. Sc.

On the frequency distribution of the means of samples from populations of certain of Pearson's types

TABLE OF CONTENTS

Page

INTRODUCTORY 52

PART I. — The Distribution of the Means of Samples from Populations of Pearson's Type I 55

(*A*) The General Solution 55

(*B*) Particular Cases:

$p = 1, q = 1$ and 2 67

$p = 1, q = 3$ 69

$p = 1, q = 4$ 71

$p = 2, q = 2$ 74

$p = 2, q = 3$ 78

$p = 2, q = 4$ 80

$p = 3, q = 3$ 82

$p = 3, q = 4$ 84

$p = 4, q = 4$ 86

(*C*) Moments of the Distribution of Means for the Type I case . . 88

(*D*) Summary to Part I 90

PART II. — The Distribution of the Means of Samples from Populations of Pearson's Type VII 91

(*A*) The General Solution 91

(*B*) Particular Cases 96

(*C*) Moments of the Distribution of Means for the Type VII case 102

(*D*) Summary to Type VII 103

General Summary 104

References 104

INTRODUCTORY

(i) The *exact* distributions of statistical estimates made from samples of non-normal populations are almost entirely unknown.

The distribution of the means of samples from normal populations dates back, of course, to GAUSS or even before, but it is to the powerful geometrical methods of FISCHER that we owe a precise demonstration of the distribution of the variance, (1), (first obtained by STUDENT'S intuition, (2)), the distribution of the correlation coefficient, (1), of the regression coefficient, (3), of the correlation ratio, (3), of partial, (4), and finally of multiple correlation coefficients (5). Work on these distributions has also been done by PEARSON (6), by ROMANOVSKY (7) and by WISHART (8). The exact distribution of the higher moments is at present unsolved for the normal case.

Some writers, conscious of the difficulties, still for the most part unsurmounted, of obtaining exact solutions for non-normal populations have concentrated their attention on obtaining *the moments* of such sampling distributions ; PEARSON for instance has given many approximate formulae for the second moment of moment coefficients (9) while TCHOUPROFF was the first to give exact results for the moments of the mean and the first four moments of the variance (10). A full treatment of this problem of obtaining the moments of any moment function has recently been given by FISHER (11) while WISHART (12) has shown how to apply FISHER'S results to normal populations.

Now that the moments of moment coefficients can be obtained whatever the nature of the population sampled, the most promising way of obtaining their exact distributions seems to be by way of the characteristic function.

Thus if $\varphi_r(x)\,dx$ gives the sampling distribution of the r^{th} moment coefficient m_r whose moments are $\mu(r^1)\,\mu(r^2)\ldots\ldots\mu(r^n)\ldots\ldots$ we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_r(x)\,dx = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x}\,\varphi_r(x)\,dx = \sum_{s=0}^{\infty} \mu(r^s)\,\frac{a^s}{s!} = \psi_r(\alpha)$$

say if we write $\alpha = i\beta$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta x} \varphi_r(x)\, dx = \psi_r(i\beta)$$

and hence in general, by FOURIER'S Integral Theorem

$$\psi_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta x} \varphi_r(i\beta)\, d\beta$$

Such functions as $\psi_r(i\beta)$ are known as characteristic functions and their theory has been discussed rigorously by PAUL LEVY (13).

The present writer independently applied a similar method (14) to the determination of the frequency distribution of the mean and discussed as particular cases the distributions of the means of samples from populations of PEARSON'S Type III and Type II whose standard forms are

Type III $\qquad y = y_0 e^{-\frac{px}{a}} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^p$

Type II $\qquad y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m$

The object of the present paper is to determine the precise distributions of the means of samples from Populations of PEARSON'S Type I and Type VII whose standard forms are

Type I $\qquad y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{m_2}$

Type VII $\qquad y = y_0 \left(1 + \frac{x^2}{a_2}\right)^{-m}$

In what follows the forms

Type I $\qquad y = c\, x^{p-1} (1 - x)^{q-1}$

Type VII $\qquad y = c\, (1 + x^2)^{-m}$

will be used. These are easily reduced from the standard forms and more easily handled analytically. The Pearsonian system of frequency distributions forms a widely known system so that the results may be of interest both in themselves and as illustrating the general method.

(ii) In the previous paper (14), it was shown that if $y = f(x)$ be any frequency distribution and if samples of size n be drawn at random from a population of this type, supposed indefinitely large, then, if $Y = \psi(x)$ is the frequency distribution of totals (i. e. n times the mean) in such samples,

$$\left(\int_a^b f(x)\, e^{\alpha x}\, dx\right)^n = \int_{na}^{nb} \psi(x)\, e^{\alpha x}\, dx \qquad (1)$$

a to b being the range of the original frequency distribution. This led to the solution

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta x}\, F(i\beta)\, d\beta, \qquad na \leq x \leq nb \qquad (2)$$

where

$$F(\alpha) = \left(\int_a^b f(x)\, e^{\alpha x}\, dx\right)^n$$

provided $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta x}\, F(i\beta)\, d\beta = 0$ where $x < na$ or $> nb$.

From (2) by the simple substitution $x = n\bar{x}$ the distribution of means was at once obtained.

This method was applied to the normal curve, to Pearson's Type III and to Pearson's Type II

$$y = x^{p-1}(1-x)^{p-1}$$

the distribution of means of the latter case being

$$y = \frac{n}{2}(\sqrt{\pi})^{n-2}\{\Gamma(p)\}^n \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{J_{p-\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\beta\left(p-\frac{1}{2}\right)}\right\}^n \cos(n\bar{x}\beta)\, d\beta \qquad (3)$$

By putting $p = 1$, the case of a rectangular distribution was reached and discussed in some detail, and it was pointed out that, for all integral values of p the function under the integral sign in (3) reduces to a trigonometrical function which is integrable.

Subsequently the writer performed the integrations and deduced explicitly the frequency distribution of the mean in the case $p = 2$ for all values of n (the size of sample), and for $p = 3$, $p = 4$ for samples of 2, 3 and 4. Still later however he realised that it was pos-

sible to obtain, by the same method, the frequency distribution of the mean in samples from the more general Type I

$$y = c\, x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}$$

for integral values of p and q and that the distributions which he had deduced from (3) were merely particular cases, when $p = q$, of the distributions arising from Type I populations. Accordingly the more general case will now be considered.

PART I.

The distribution of the means of Samples from Pearson's type I for integral values of p and q.

(A) *The General Solution.*

The Type I curve may be written

$$y = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\, x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}$$

hence if

$$F(\alpha) = \left\{\int_0^1 \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\, x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\, e^{\alpha x}\, dx\right\}^n \tag{4}$$

the distribution of totals is given by

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta x}\, F(i\beta)\, d\beta \qquad 0 \leq x \leq n \tag{5}$$

provided this integral is zero when x is greater than n or negative.

Consider the expression $F(\alpha)$. It is known that if $M_{k,m}(z)$ is the confluent hypergeometric function (15) defined by

$$M_{k,m}(z) = z^{\frac{1}{2}+m} e^{-\frac{1}{2}z}\left\{1 + \frac{\frac{1}{2}+m-k}{1!\,(2m+1)}\, z + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{1}{2}+m-k\right)\left(\frac{3}{2}+m-k\right)}{2!\,(2m+1)\,(2m+2)}\, z^2 + \ldots\ldots\right\}$$

then

$$M_{k,m}(z) = C \int_{-1}^{1} (1+u)^{-\frac{1}{2}+m-k} (1-u)^{-\frac{1}{2}+m+k} e^{\frac{1}{2}zu}\, du$$

where $$C = \frac{2^{-2m}\,\Gamma(2m+1)\, z^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m+k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)}$$

On writing $1-u = 2w$ we find

$$M_{k,m}(z) = 2^{2m}\, C\, e^{\frac{1}{2}z} \int_{0}^{1} e^{-zw} (1-w)^{-\frac{1}{2}+m-k} w^{-\frac{1}{2}+m+k}\, d\omega$$

Now put

$$p-1 = -\frac{1}{2}+m+k$$

$$q-1 = -\frac{1}{2}+m-k$$

we find

$$m = \frac{1}{2}(p+q-1)$$

$$k = \frac{1}{2}(p-q)$$

whence

$$M_{\frac{1}{2}(p-q),\frac{1}{2}(p+q-1)}(-\alpha) =$$

$$= e^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)} (-\alpha)^{\frac{1}{2}(p+q)} \int_{0}^{1} e^{\alpha x} x^{p-1} (1-x)^{q-1}\, dx$$

and

$$\int_{0}^{1} e^{\alpha x} x^{p-1} (1-x)^{q-1}\, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} e^{\frac{\alpha}{2}} (-\alpha)^{-\frac{1}{2}(p+q)} M_{\frac{1}{2}(p-q),\frac{1}{2}(p+q-1)}(-\alpha)$$

Whence

$$F(\alpha) = e^{n\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{M_{\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(-\alpha)}{(-\alpha)^{\frac{1}{2}(p+q)}}\right]^n (*) \qquad \ldots\ldots (6)$$

(*) It is interesting to see how this reduces to the known case of Type II when $p = q$.

In this case we have

$$\int_0^1 e^{\alpha x}\, x^{p-1}\,(1-x)^{p-1}\,dx = e^{\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{M_{0,\,p-\frac{1}{2}}(-\alpha)}{(-\alpha)^p}\right]$$

and $M_{0,\,p-\frac{1}{2}}(-\alpha)$ may be written (see (16) p. 332).

$$M_{0,\,p-\frac{1}{2}}(-\alpha) = (-\alpha)^p\left\{1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2s}}{2^{4s}\, s!\left(p+\frac{1}{2}\right)\left(p+\frac{3}{2}\right)\ldots\left(p+s-\frac{1}{2}\right)}\right\}$$

whence

$$\frac{M_{0,\,p-\frac{1}{2}}(-\alpha)}{(-\alpha)^p} = 1 + \frac{(\alpha/2)^2}{2^2\, 1!\left(p+\frac{1}{2}\right)} + \frac{(\alpha/2)^4}{2^4\, 2!\left(p+\frac{1}{2}\right)\left(p+\frac{3}{2}\right)} +$$

$$+ \ldots\ldots = 2^{p-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{I_{p-\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p-\frac{1}{2}}}$$

where $I_n(x)$ is BESSEL'S Function of order n with imaginary argument.

Hence $F(\alpha) = \left[e^{\frac{\alpha}{2}}\, 2^{2p-1}\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{I_{p-\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha^{p-\frac{1}{2}}}\right]^n$

$$= \left[\frac{2^{2p-1}\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left\{e^{\frac{\alpha}{2}}\,\Gamma(p)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\alpha^{-p+\frac{1}{2}}\, I_{p-\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}\right]^n$$

$$= \left[\frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(p)\,\Gamma(p)}\left\{e^{\frac{\alpha}{2}}\,\Gamma(p)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\alpha^{-p+\frac{1}{2}}\, I_{p-\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}\right]^n$$

as obtained in the previous paper (14, p. 230).

Thus the distribution of totals will be given by

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta x}\, e^{\frac{ni\beta}{2}} \left\{ \frac{M_{\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(-i\beta)}{(-i\beta)^{\frac{1}{2}(p+q)}} \right\}^n d\beta$$

and the distribution of means by

$$y = \frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\beta\left(\bar{x}-\frac{1}{2}\right)} \left\{ \frac{M_{\frac{1}{2}(p+q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(-i\beta)}{(-i\beta)^{\frac{1}{2}(p+q)}} \right\}^n d\beta$$

or on transferring the origin to the point $\bar{x} = \frac{1}{2}$

$$y = \frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\beta\bar{x}} \left\{ \frac{M_{\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(-i\beta)}{(-i\beta)^{\frac{1}{2}(p+q)}} \right\}^n d\beta$$

$$\text{where } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \qquad \ldots\ldots (7)$$

In order that this solution may be valid it is necessary to show that the integral (7) is zero when $x > \frac{1}{2}$ *or* $< \frac{1}{2}$. This may be done by contour integration. (See footnote to p. 61).

We will now show that (7) is actually integrable when p, q are integers.

It is known that when

$$-\frac{1}{2}\pi < \arg z < \frac{3}{2}\pi \text{ and } -\frac{3}{2}\pi < \arg(-z) < \frac{1}{2}\pi$$

$$M_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)} e^{k\pi i} W_{-k,m}(-z) +$$

$$+ \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m+k\right)} e^{\left(\frac{1}{2}+m+k\right)\pi i} W_{k,m}(z)$$

where $W_{k,m}(z)$ is WHITTAKER'S confluent hypergeometric function (16, p. 340). This gives

$$M_{\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(q+p-1)}(z) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)} e^{\frac{1}{2}(p-q)\pi i} W_{-\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(-z)$$

$$+ \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} e^{p\pi i} W_{\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(z)$$

where if z is real and positive we must take arg $z = 0$, arg $(-z) = -\pi$; if z is real and negative we must take arg $(z) = \pi$, arg $(-z) = 0$. Hence with this convention

$$M_{\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(-\alpha) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)} e^{\frac{1}{2}(p-q)\pi i} W_{-\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(\alpha)$$

$$+ \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} e^{p\pi i} W_{\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(-\alpha)$$

..... (8)

Now using the asymptotic expansion for the Whittaker functions, we have

$$W_{\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(z) \sim e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2}(p-q)} \left\{1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s}{s!\, z^s}\right\}$$

where

$$A_s = \left\{\frac{1}{4}(p+q-1)^2 - \frac{1}{4}(p-q-1)^2\right\}$$

$$\times \left\{\frac{1}{4}(p+q-1)^2 - \frac{1}{4}(p-q-3)^2\right\} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \left\{\frac{1}{4}(p+q-1)^2 - \frac{1}{4}(p-q-\overline{2s-1})^2\right\}$$

and

$$W_{-\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(z) \sim e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2}(q-p)} \left\{1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_s}{s!\, z^s}\right\}$$

where

$$B_n = \left\{\frac{1}{4}(p+q-1)^2 - \frac{1}{4}(q-p-1)^2\right\}$$

$$\times \left\{\frac{1}{4}(p+q-1)^2 - \frac{1}{4}(q-p-3)^2\right\} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \left\{\frac{1}{4}(p+q-1)^2 - \frac{1}{4}(q-p-\overline{2s-1})^2\right\}$$

It is to be noted that both these expansions consist of a finite number of terms only when p and q are integers, A_s vanishing when $s \geq p$ and B_s when $s \geq q$. Further the asymptotic expansions for $W_{\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(z)$, if z is real and negative, is only valid when p is an integer.

We thus obtain (taking $\alpha > 0$)

$$W_{-\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(\alpha) \sim e^{-\frac{\alpha}{2}}\,\alpha^{\frac{1}{2}(q-p)}\left\{1 + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{B_s}{s!\,\alpha^s}\right\}$$

$$W_{\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(-\alpha) \sim e^{\frac{\alpha}{2}}\,\alpha^{\frac{1}{2}(p-q)}\,e^{\frac{1}{2}(p-q)\pi i}\left\{1 + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{A^s}{s!\,(-\alpha)^s}\right\}$$

$\cdots\cdots$ (9)

Thus

$$M_{\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(\alpha)$$

$$\sim \left[\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)}\,e^{\frac{1}{2}(p-q)\pi i}\,e^{-\frac{1}{2}\alpha}\,\alpha^{\frac{1}{2}(q-p)}\left\{1 + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{B_s}{s!\,\alpha^s}\right\}\right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)}\,e^{p\pi i}\,e^{\frac{1}{2}\alpha}\,\alpha^{\frac{1}{2}(p-q)}\,e^{\frac{1}{2}(p-q)\pi i}\left\{1 + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{A_s}{s!\,\alpha^s}\right\}\right] \cdots\cdots (10)$$

Hence if p, q are integers, remembering $\arg(\alpha) = \arg(-z) = -\pi$

$$\frac{M_{\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(-\alpha)}{(-\alpha)^{\frac{1}{2}(p+q)}}$$

$$= (-1)^p \left[\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)} e^{-\frac{1}{2}\alpha} \alpha^{-p} \left\{ 1 + \sum_{s=1}^{q-1} \frac{B_s}{s!\,\alpha^s} \right\} \right.$$

$$\left. + (-1)^p \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} e^{\frac{1}{2}\alpha} \alpha^{-q} \left\{ 1 + \sum_{s=1}^{p-1} \frac{A_s}{s!\,(-\alpha)^s} \right\} \right] \ldots (11) \quad (*)$$

(*) We are now in a position to show that

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\beta\bar{x}} \left\{ \frac{M_{\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(-i\beta)}{(-i\beta)^{\frac{1}{2}(p-q)}} \right\}^n d\beta .$$

is zero when $x > \frac{1}{2}$ or $< \frac{1}{2}$ and p, q, integers, which was pointed out on p. 58 to be a necessary condition for the validity of the solution.

The above integral $= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\beta)\, d\beta$

where $\varphi(\beta) = e^{-in\beta\bar{x}} (-1)^p \left[\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)} e^{-\frac{1}{2}i\beta} (i\beta)^{-p} \left\{ 1 + \sum_{s=1}^{q-1} \frac{B_s}{s!\,(i\beta)^s} \right\} \right.$

$$\left. + (-1)^p \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} e^{\frac{1}{2}i\beta} (i\beta)^{-q} \left\{ 1 + \sum_{s=1}^{p-1} \frac{A_s}{s!\,(-i\beta)^s} \right\} \right]^n$$

Consider $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\beta\bar{x}} \varphi(\beta)\, d\beta$

taken round a semi circular contour of radius r above the real axis with centre at the origin. From the definition of M as a series it follows that $\varphi(\beta)$ has no singularities within the contour.

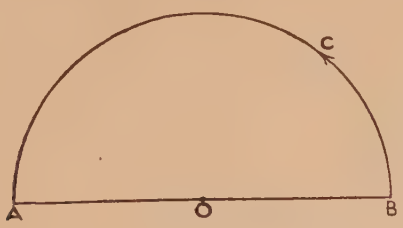

FIG. 1.

Hence $\int_C \varphi(\beta)\, d\beta = 0$

Now consider $\int_{BCA} \varphi(\beta)\, d\beta$.

On the semi-circle $\beta = r e^{i\theta}$ and as $r \to \infty$

$$\varphi(\beta) \sim (-1)^p e^{-in\beta\bar{x}}$$

$$\times \left[\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)} e^{-\frac{1}{2}i\beta} (i\beta)^{-p} + (-1)^p \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} e^{\frac{1}{2}i\beta} (i\beta)^{-q} \right]^n$$

where A_s, B_s may also be written

$$A_s = (p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-s)\,q\,(q+1)\ldots\ldots(q+s-1)$$

$$B_s = (q-1)(q-2)\ldots\ldots(q-s)\,p\,(p+1)\ldots\ldots(p+s-1)$$

$$\sim (-1)^p e^{-in\beta\bar{x}} \left\{\Gamma(p+q)\right\}^n \sum_{s=0}^{n} \frac{{}^nC_s\, e^{\frac{1}{2}i\beta(n-2s)}}{\left\{\Gamma(q)\right\}^s \left\{\Gamma(p)\right\}^{n-s} (i\beta)^{ps+q(n-s)}}$$

$$\left|\varphi(\beta)\right| \sim \left| \sum_{s=0}^{n} Q_s \frac{e^{-in\beta\left(\bar{x}-\frac{1}{2}+\frac{s}{n}\right)}}{(i\beta)^{ps+q(n-s)}} \right|$$

where $$Q_s = \frac{(-1)^p \left\{\Gamma(p+q)\right\}^n}{\left\{\Gamma(q)\right\}^s \left\{\Gamma(p)\right\}^{n-s}}$$

Now suppose $\bar{x} < -\frac{1}{2}$

Then since s can only take the values 0, 1, 2 ... n, $\bar{x} - \frac{1}{2} + \frac{s}{n}$ is negative *for all values of* s say $= -\mu_s$

and $$\left| \frac{e^{-in\beta\left(\bar{x}-\frac{1}{2}+\frac{s}{n}\right)}}{(i\beta)^{ps+q(n-s)}} \right| = \frac{e^{-n\mu_s r \sin\theta}}{|\beta|^{ps+q(n-s)}}$$

Hence $$\left|\varphi(\beta)\right| < \frac{A e^{-kr\sin\theta}}{r} \qquad k>0$$

where A is independent of β.

Hence $$\int_{BCA} \varphi(\beta)\,d\beta \to 0 \text{ as } |\beta| \to \infty$$

and $$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\beta)\,d\beta = 0$$

If $\bar{x} > \frac{1}{2}$, $\bar{x} - \frac{1}{2} + \frac{s}{n}$ is positive *for all values of* s and the same result follows by taking a semi-circular contour below the real axis.

But if $-\frac{1}{2} < \bar{x} < \frac{1}{2}$

$x - \frac{1}{2} + \frac{s}{n}$ is positive for some values of s and negative for others and $\int \varphi(\beta)\,d\beta$ does not vanish round either semi-circular contour, and the integral is of course not zero.

Now from (7) we see that the distribution may be written

$$y = \frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\beta)\, d\beta$$

where

$$G(\beta) = e^{-in\beta\bar{x}}\left\{\frac{M_{\frac{1}{2}(p-q),\,\frac{1}{2}(p+q-1)}(-i\beta)}{-(i\beta)^{\frac{1}{2}(p+q)}}\right\}^n$$

or

$$y = \frac{n}{2\pi}\ \lim_{\varepsilon \to o}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} G(\beta)\, d\beta + \int_{-\varepsilon}^{\infty} G(\beta)\, d\beta\right] \quad \ldots\ (11\,a)$$

Now the integrand has no pole at $\beta = 0$, therefore the LAURENT expansion of (11a) in powers of ε, must be such that all the coefficients of negative powers of ε vanish.

Now on substituting the value of $G(\beta)$ given by (11) in

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} G(\beta)\, d\beta + \int_{\varepsilon}^{\infty} G(\beta)\, d\beta$$

and expanding the multinomial the expression is seen, when p and q are integers, to consist of a finite number of terms of the type

$$C\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right) e^{-in\beta\bar{x}}\, e^{\frac{1}{2}i\beta(n-2r)}\left(\frac{1}{i\beta}\right)^s d\beta$$

(where r is an integer and $0 \leq r \leq n$)

$$= C\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right) e^{-in\beta\left(\bar{x} - \frac{1}{2} + \frac{r}{n}\right)}\left(\frac{1}{i\beta}\right)^s d\beta$$

But

$$\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{e^{-inc\beta}\, d\beta}{(i\beta)^s} = i^{-is}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\left(\frac{\cos nc\beta - i\,\sin nc\beta}{\beta^s}\right) d\beta$$

Now if s is even

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin\, n\,c\,\beta}{\beta^s}\, d\beta = -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\sin\, n\,c\,\beta}{\beta^s}\, d\beta$$

Hence

$$\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right) \frac{e^{-i\,n\,c\,\beta}}{(i\,\beta)^s}\, d\beta = 2\,i^{-s} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos\, n\,c\,\beta}{\beta^s}\, d\beta$$

$$= 2\,(-1)^{\frac{s}{2}} \sum_{p=0}^{s-2} \frac{(n\,c)^p \cos\left(n\,c\,\varepsilon + \frac{p\,\pi}{2}\right)}{(s-1)\,\ldots\,(s-p-1)\,\varepsilon^{s-p-1}}$$

$$+ \frac{2\,(n\,c)^{s-1}}{(s-1)\,!} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin\, n\,c\,\beta}{\beta}\, d\beta \qquad \ldots\ldots \text{(11 b i)}$$

But if s is odd

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{\cos\, n\,c\,\beta}{\beta^s}\, d\beta = -\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos\, n\,c\,\beta}{\beta^s}\, d\beta\,,$$

and

$$\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right) \frac{e^{-i\,n\,c\,\beta}}{(i\,\beta)^s}\, d\beta = -2\,i^{-s+1} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin\, n\,c\,\beta}{\beta^s}\, d\beta$$

$$= 2\,(-1)^{\frac{s+1}{2}} \sum_{p=0}^{s-2} \frac{(n\,c)^p \sin\left(n\,c\,\varepsilon + \frac{p\,\pi}{2}\right)}{(s-1)\,\ldots\,(s-p-1)\,\varepsilon^{s-p-1}}$$

$$- \frac{2\,(n\,c)^{s-1}}{(s-1)\,!} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin\, n\,c\,\beta}{\beta}\, d\beta \qquad \ldots\ldots \text{(11 b ii)}$$

Thus a whole series of expressions of the type (11bi) and (11bii) have to be substituted in (11a) and when this is done we obtain the LAURENT expansion of 11a in positive and negative powers of ε. The coeffi-

cients of all the negative powers must as we have seen vanish, further no contribution is made to the term independent of ε by the series in (11*b*), because each series consists of cosines divided by odd powers of ε and sines divided by even powers of ε. Thus these series contribute only to the positive powers of ε in the LAURENT expansion and these vanish in the limit.

Thus only the integrals in (11*b*) need be taken into account in evaluating 11*a* and therefore (7).

I propose to write this result symbolically :—

$$\text{cont.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-inc\beta}\, d\beta}{(i\beta)^s} = \frac{2\,(nc)^{s-1}}{(s-1)!} \int_0^{\infty} \frac{\sin nc\beta}{\beta}\, d\beta$$

$$= \frac{|nc|^{s-1}}{(s-1)!}\pi \qquad \text{if } s \text{ is even,}$$

and

$$\text{cont.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-inc\beta}\, d\beta}{(i\beta)^s} = \frac{-(nc)^s\,\pi}{|nc|\,(s-1)!} \qquad \text{if } s \text{ is odd.}$$

It must be clearly understood that

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-inc\beta}\, d\beta}{(i\beta)^s}$$

is divergent but its contribution, so to speak, to the final result is that given.

Thus

$$\text{cont.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\beta\left(\bar{x}-\frac{1}{2}+\frac{r}{n}\right)} \left(\frac{1}{i\beta}\right)^s d\beta = \frac{\left|n\left(\bar{x}-\frac{1}{2}+\frac{r}{n}\right)\right|^{s-1}\pi}{(s-1)!} \quad \text{if } s \text{ is even}$$

$$\text{and} \quad \frac{-\left\{n\left(\bar{x}-\frac{1}{2}+\frac{r}{n}\right)\right\}^s \pi}{\left|n\left(\bar{x}-\frac{1}{2}+\frac{r}{n}\right)\right|(s-1)!} \quad \text{if } s \text{ is odd.}$$

We may write these formulae conveniently

$$\text{cont.}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\beta\left(\bar{x}-\frac{1}{2}+\frac{r}{n}\right)}\left(\frac{1}{i\beta}\right)^s d\beta = \pm \frac{n\left(\bar{x}-\frac{1}{2}+\frac{r}{n}\right)^{s-1}\pi}{(s-1)!} \text{ if } s \text{ is even}$$

$$\text{and } \mp \frac{n\left(\bar{x}-\frac{1}{2}+\frac{r}{n}\right)^{s-1}\pi}{(s-1)!} \text{ if } s \text{ is odd}$$

where the upper sign is to be taken in front of the bracket if the expression within the bracket is positive and the lower sign in the contrary case.

Thus we see that the distribution of means is the sum of a finite number of terms of the type $C\left(\bar{x}-\frac{1}{2}+\frac{r}{n}\right)^s$ and that there will be points where the higher differential coefficients become discontinuous at

$$\bar{x} = 0, \pm\frac{1}{n}, \pm\frac{2}{n}, \ldots\ldots \pm\frac{n-2}{2n} \text{ when } n \text{ is even}$$

$$\text{and } \bar{x} = \pm\frac{1}{2n}, \pm\frac{3}{2n}, \pm\frac{5}{2n}, \ldots\ldots \pm\frac{n-2}{2n} \text{ when } n \text{ is odd, the}$$

origin being at the centre of the range.

The distribution thus consists of separate arcs of parabolae of degree $n(p+q-1)-1$ having contact of order not less than $(nt-2)$ at the above points where they join, t being the smaller of p and q. These are the same points at which the distribution of means of samples from Type II and from rectangular distributions have discontinuous differential coefficients.

This might have been anticipated from HALL'S (16) geometrical treatment of the rectangular case. In determining the distribution of means of all the limited range curves we have to integrate a " density function " over a region defined by the intersection of a hyperplane with a hyper-cube and these discontinuities occur when the " polygon " of inersection changes Type. The values of the mean where this happens are quite independent of the particular " density function " integrated, that is of the form of the original frequency distribution.

(B) *Particular Cases.*

Particular cases of the general solution will now be considered.

(i) $p = 1, q = 1$

This is the case of the rectangular population and has already been discussed by HALL (16) and the present writer (14).

(ii) $p = 1, q = 2$

The original distribution is a triangle with a finite ordinate at one end of the range whose equation is given by

$$y = 2(1 - x)$$

We have

$$\frac{M_{-\frac{1}{2},1}(-\alpha)}{(-\alpha)^{\frac{1}{2}}} = -2e^{-\frac{1}{2}\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right) + 2\frac{e^{\frac{1}{2}\alpha}}{\alpha^2}$$

So that the distribution of means is given by

$$y = \frac{n\,2^{n-1}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-in\beta\bar{x}}}{(i\beta)^{2n}}\left[e^{\frac{1}{2}i\beta} - e^{-\frac{1}{2}i\beta}(1 + i\beta)\right]^n d\beta$$

and the expression in squared brackets

$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, {}^nC_r \left(e^{\frac{1}{2}i\beta}\right)^{n-2r} (1 + i\beta)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, {}^nC_r \sum_{s=0}^{r} {}^rC_s \left(e^{\frac{1}{2}i\beta}\right)^{n-2r} (i\beta)^{2s}$$

and the distribution of means is given by

$$y = \frac{n\,2^{n-1}}{\pi} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, {}^nC_r \sum_{s=0}^{r} {}^rC_s \left\{ \text{cont.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-in\beta\left(\bar{x} - \frac{1}{2} + \frac{r}{n}\right)}}{(i\beta)^{2n-s}}\, d\beta \right\}$$

or

$$y = n\,2^{n-1} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, {}^nC_r \sum_{s=0}^{r} (-1)^{2n-s}\, {}^rC_s \left\{ \pm \frac{\left(n\bar{x} - \frac{n}{2} + r\right)^{2n-s-1}}{(2n-s-1)!} \right\}$$

where the upper sign is to be taken if the expression within the bracket is positive and the lower sign in the contrary case.

Putting $n = 2, 3, 4$ we obtain the distribution of means for samples of 2,3 and 4 respectively. These are

Samples of 2.

$$y = 4\left[-\frac{(2\bar{x}-1)^3}{3!} - 2\left\{\pm\frac{(2\bar{x})^3}{3!} \mp \frac{(2\bar{x})^2}{2!}\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{(2\bar{x}+1)^3}{3!} - \frac{2(2\bar{x}+1)^2}{2!} + \frac{(2\bar{x}+1)}{1!}\right] \quad \ldots\ldots (14)$$

This is a curve with zero ordinate at both ends of the range and the two cubics which form it have contact of the first order at $x = o$.

Samples of 3.

$$y = 12\left[-\frac{\left(3\bar{x}-\frac{3}{2}\right)^5}{5!} - 3\left\{\pm\frac{\left(3\bar{x}-\frac{1}{2}\right)^5}{5!} \mp \frac{\left(3\bar{x}-\frac{1}{2}\right)^4}{4!}\right\}\right.$$

$$+ 3\left\{\pm\frac{\left(3\bar{x}+\frac{1}{2}\right)^5}{5!} \mp \frac{2\left(3\bar{x}+\frac{1}{2}\right)^4}{4!} \pm \frac{\left(3\bar{x}+\frac{1}{2}\right)^3}{3!}\right\}$$

$$\left. - \left\{\frac{\left(3\bar{x}+\frac{3}{2}\right)^5}{5!} - \frac{3\left(3\bar{x}+\frac{3}{2}\right)^4}{4!} + \frac{3\left(3\bar{x}+\frac{3}{2}\right)^3}{3!} - \frac{\left(3\bar{x}+\frac{3}{2}\right)^2}{2!}\right\}\right]$$

$$\ldots\ldots (15)$$

This again has zero ordinate at both ends of the range, the points of junction of the separate arcs are at $\bar{x} = \pm\frac{1}{6}$ but while there is 4 point contact at $\bar{x} = \frac{1}{6}$, there is only 3 point contact at $\bar{x} = -\frac{1}{6}$.

Samples of 4.

$$y = 32\left[-\frac{(4\bar{x}-2)^7}{7!} - 4\left\{\pm\frac{(4\bar{x}-1)^7}{7!} \mp \frac{(4\bar{x}-1)^6}{6!}\right\}\right.$$

$$+ 6\left\{\pm\frac{(4\bar{x})^7}{7!} \mp \frac{2(4\bar{x})^6}{6!} \pm \frac{(4\bar{x})^5}{5!}\right\}$$

$$- 4\left\{\pm\frac{(4\bar{x}+1)^7}{7!} \mp \frac{3(4\bar{x}+1)^6}{6!} \pm \frac{3(4\bar{x}+1)^5}{5!} \mp \frac{(4\bar{x}+1)^4}{4!}\right\}$$

$$\left. + \frac{(4\bar{x}+2)^7}{7!} - \frac{4(4\bar{x}+2)^6}{6!} + \frac{6(4\bar{x}+2)^5}{5!} - \frac{4(4\bar{x}+2)^4}{4!} + \frac{(4\bar{x}+2)^3}{3!}\right]$$

..... (16)

This also has a zero ordinate at both ends of the range, the points of junction of the separate arcs are at $\bar{x} = 0$ and $\bar{x} = \pm\frac{1}{4}$ with 5, 6 and 4 point contact respectively at these points.

In all the cases which follow the distributions of means have a zero ordinate at both ends of the range and (except for samples of 2 when p or $q = 1$) the axis of $\bar{x}$ is tangential to them, while the order of the contact at the junctions may be seen at once by inspection. Further where there is an ambiguous sign, the correct sign is determined by the rule that the upper sign is to be taken where the expression within the bracket following is positive and the lower sign in the contrary case. To save writing the expressions out at length they will now be expressed in the form

$$y = k\,\Sigma\,\lambda_{a,s}\left(\frac{n\bar{x}+a}{s!}\right)^s$$

accompanied by a table giving the coefficients $\lambda_{a,s}$ for such values of a and s as occur. Where there is an ambiguous sign the upper sign must be taken when $n\bar{x}+a$ is positive and the lower when $n\bar{x}+a$ is negative.

(iii) $p = 1, q = 3$.

The population curve is a limited range J curve, with a finite or-

dinate at one end of the range, whose equation is $y = 3\ (1 - x)^2$. We have

$$\frac{M_{-1,\frac{3}{2}}(-\alpha)}{(-\alpha)^2} = 3\left[\frac{2\,e^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha^3} - \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha}}{\alpha}\left(1 + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}\right)\right]$$

$$\left[\frac{M_{-1,\frac{3}{2}}(-\alpha)}{(-\alpha)^2}\right]^n = \left(\frac{3}{\alpha^3}\right)^n \left[2\,e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{\frac{-\alpha}{2}}(2 + 2\alpha + \alpha^2)\right]^n$$

and the distribution of means is given by

$$y = \frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ni\beta\bar{x}}\,\frac{3^n}{(i\beta)^{3n}}\left[2\,e^{\frac{1}{2}i\beta} - e^{-\frac{1}{2}i\beta}\,(2 + 2i\beta + (i\beta)^2)\right]^n d\beta \qquad \ldots\ldots (17)$$

Putting $n = 2, 3, 4$ in succession and in each case expanding and integrating we are led to the following results.

Samples of 2.

$$y = 9\,\Sigma\,\lambda_{a,s}\left(\frac{2\bar{x} + a}{s!}\right)^s \qquad \ldots\ldots (18)$$

TABLE I. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 1,\ q = 3,\ n = 2)$.

a	s				
	5	4	3	2	1
-1	-4	...	...	...	...
0	∓ 8	± 8	∓ 4	...	...
1	$+4$	-8	$+8$	-4	$+1$

Where the ambiguous sign occurs, the upper sign is to be taken if $(2\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

Sample of 3.

$$y = \frac{81}{2}\,\Sigma\,\lambda_{a,s}\,\frac{(3\bar{x} + a)^s}{s!} \qquad \ldots\ldots (19)$$

TABLE II. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 1, q = 3, n = 3)$.

a	s						
	8	7	6	5	4	3	2
$-\frac{3}{2}$	+ 8	...	...	...	...	...	...
$-\frac{1}{2}$	± 24	∓ 24	± 12	...	...	...	...
$+\frac{1}{2}$	∓ 24	± 48	∓ 48	± 24	∓ 6	...	...
$+\frac{3}{2}$	+ 8	− 24	+ 36	− 232	+ 18	− 6	+ 1

Where the ambiguous sign occurs, the upper sign is to be taken if $(3\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

Sample of 4.

$$y = 162 \Sigma \lambda_{a,s} \frac{(4\bar{x} + a)^s}{s!} \qquad \ldots\ldots(20)$$

TABLE III. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 1, q = 3, n = 4)$.

a	s								
	11	10	9	8	7	6	5	4	3
− 2	− 16	...	...	...	...	...	...	...	...
− 1	∓ 64	± 64	∓ 32	...	...	...	...	...	...
0	± 96	∓ 192	± 192	∓ 96	± 24	...	...	...	...
1	∓ 64	± 192	∓ 288	± 256	∓ 144	± 48	∓ 8	...	...
2	+ 16	− 64	+ 128	− 160	+ 136	− 80	+ 32	− 8	+ 1

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(4x + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

(iv) $p = 1, q = 4$

The population curve is a limited range J curve with a finite ordinate at one end given by

$$y = 4(1 - x)^3$$

We have

$$\left[\frac{M_{-\frac{3}{2},2}(-\alpha)}{(-\alpha)^{\frac{5}{2}}}\right] = 4\left[\frac{6e^{\frac{1}{2}\alpha}}{\alpha^4} - e^{-\frac{1}{2}\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\alpha^2} + \frac{6}{\alpha^3} + \frac{6}{\alpha^4}\right)\right]$$

$$\left[\frac{M_{-\frac{3}{2},2}(-\alpha)}{(-\alpha)^{\frac{5}{2}}}\right]^n = \frac{4^n}{\alpha^{4n}}\left[6e^{\frac{1}{2}\alpha} - e^{-\frac{1}{2}\alpha}(6 + 6\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3)\right]^n$$

and the distribution of means is given by

$$y = \frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\beta\bar{x}}\frac{4^n}{(i\beta)^{4n}}\left[6e^{\frac{i\beta}{2}} - e^{\frac{i\beta}{2}}(6 + 6i\beta + 3(i\beta)^2 + (i\beta)^3)\right]^n d\beta$$

..... (21)

Putting $n = 2, 3, 4$ in succession and expanding we obtain:—

Samples of 2.

$$y = 16\,\Sigma\lambda_{a,s}\frac{(2\bar{x} + a)^s}{s!}$$

TABLE IV. ... $\lambda_{a,s}$ ($p = 1$, $q = 4$, $n = 2$).

a	s						
	7	6	5	4	3	2	1
— 1	— 36	...	...	...	...	...	...
0	∓ 72	± 72	∓ 36	± 12	...	...	...
1	+ 36	— 72	+ 72	— 48	+ 21	— 6	+ 1

.....(22)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(2\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

Samples of 3.

$$y = 96\,\Sigma\lambda_{a,s}\frac{(3\bar{x} + a)^s}{s!}$$

TABLE V. ... $\lambda_{a,s}$ ($p = 1$, $q = 4$, $n = 3$).

a	s									
	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
$-\frac{3}{2}$	− 216	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$-\frac{1}{2}$	∓ 648	± 648	∓ 324	± 108	...	...	...	...	...	...
$+\frac{1}{2}$	± 648	∓ 1,296	± 1,296	∓ 864	± 378	∓ 108	± 18	...	...	...
$+\frac{3}{2}$	− 216	+ 648	− 972	+ 972	− 702	+ 378	− 153	+ 45	− 9	+ 1

.....(23)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(3\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

Samples of 4.

$$y = 512 \Sigma \lambda_{a,s} \frac{(4\bar{x} + a)^s}{s!}$$

TABLE VI. ... $\lambda_{a,s}$ ($p = 1$, $q = 4$, $n = 4$).

a	s					
	15	14	13	12	11	10
− 2	− 1,296	...	...	...	...	...
− 1	∓ 5,184	± 5,184	∓ 2,592	± 864	...	...
0	± 7,776	∓ 15,552	± 15,552	∓ 10,368	± 4,536	∓ 1,296
1	∓ 5,184	± 15,552	∓ 23,328	± 23,328	∓ 16,848	± 9,072
2	+ 1,296	− 5,184	+ 10,368	− 13,824	+ 13,608	− 10,368

s						
9	8	7	6	5	4	3
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
± 216	...	...	...	...	...	...
∓ 3,672	± 1,080	∓ 216	± 24	...	...	...
+ 6,264	− 3,024	+ 1,161	− 348	+ 78	− 12	+ 1

.....(24)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(4\bar{x} + a)$ is positive, and the lower sign if it is negative.

(v) $p = 2, q = 2$

Here the population curve is the Type II curve $y = 6x\,(1 - x)$ and this case is of sufficient interest to be considered in some detail. We have

$$\left[\frac{M_{0,\frac{3}{2}}(-\alpha)}{(-\alpha)^2}\right] = 6\left\{\frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha}}{\alpha^2}\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)+\frac{e^{\frac{1}{2}\alpha}}{\alpha^2}\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\right\}$$

$$= \frac{6}{\alpha^3}\left\{e^{-\frac{1}{2}\alpha}(2+\alpha)+e^{\frac{1}{2}\alpha}(-2+\alpha)\right\}$$

Whence the distribution of means may be written

$$y = \frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\beta\bar{x}}\left(\frac{6}{i\beta^3}\right)^n\left\{e^{-\frac{1}{2}i\beta}(2+i\beta)+e^{\frac{1}{2}i\beta}(-2+i\beta)\right\}^n d\beta \;(*) \qquad \ldots\ldots (25)$$

On expanding the Binomial this may be written

$$y = \frac{n\,6^n}{2\pi}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\,{}^nC_r\,f_{n,r}(\bar{x})$$

where

$$f_{n,r}(\bar{x})\left\{\text{cont.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\beta\left(n\bar{x}+\frac{1}{2}n-r\right)}}{(i\beta)^{3n}}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\,2^{n-s}\,p_{r,s}\,(i\beta)^s\,d\beta\right\}$$

(*) This may also be written

$$y = \frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\beta\bar{x}}\left(\frac{6}{i\beta^3}\right)^n\left\{-4\sinh\frac{i\beta}{2}+2i\beta\cosh\frac{i\beta}{2}\right\}^n d\beta$$

$$= \frac{n}{2\pi}\cdot 12^n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\beta\bar{x}}\left(\frac{2\sin\frac{\beta}{2}-\beta\cos\frac{\beta}{2}}{\beta^3}\right)^n d\beta$$

a form which is easily deduced from the BESSEL formula for the Type II case previously established.

and

$$p_{r,s} = {}^{n-r}C_0\ {}^rC_s - {}^{n-r}C_1\ {}^rC_{s-1} +$$

$$+ \ldots\ldots (-1)^r\ {}^{n-r}C_t\ {}^rC_{s-t} \ldots\ldots + (-1)^s\ {}^{n-r}C_s\ {}^rC_0$$

with the convention that ${}^aC_b = 0$ if $b > a$ or

$$y = \frac{n\,6^n}{2} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\ {}^nC_r \sum_{s=0}^{n} (-1)^n\ 2^{n-s}\ p_{r,s} \left\{ \pm \frac{\left(n\bar{x} + \frac{1}{2}n - r\right)^{3n-s-1}}{(3n-s-1)!} \right\}$$

or since

$${}^nC_r\ p_{r,s} = (-1)^{r+s}\ {}^nC_s\ p_{s,r} \quad (*)$$

$$y = \frac{n\,6^n}{2^{2n}} \sum_{s=0}^{n} (-1)^{n-s} \frac{{}^nC_s}{(3n-s-1)!}$$

$$\sum_{r=0}^{n} p_{s,r} \left\{ \pm (2n\bar{x} + n - 2r)^{3n-s-1} \right\} \qquad \ldots\ldots (26)$$

a general solution for this case.

(*) Suppose $s > r$ then

${}^nC_r\ p_{r,s} =$

$= {}^nC_r \sum_{t=0}^{t=s} (-1)^t\ {}^{n-r}C_t\ {}^rC_{s-t}$

$= {}^nC_r \sum_{t=s-r}^{t=s} (-1)^t\ {}^{n-r}C_t\ {}^rC_{s-t}$

$= (-1)^{s-r}\ {}^{n-r}C_{s-r}\ {}^nC_r \sum_{t=s-r}^{t=s} (-1)^{t-s-r} \frac{(n-s)(n-s-1)\ldots(n-r-t+1)}{(s-r+1)(s-r+2)\ldots\ldots t}\ {}^rC_{s-t}$

$= (-1)^{s-r}\ {}^nC_s \sum_{t-s=r}^{t=s} {}^sC_r (-1)^{t-s+r} \frac{(n-s)(n-s-1)\ldots(n-r-t+1)}{(s-r+1)(s-r+2)\ldots\ldots t}\ {}^rC_{s-t}$

$= (-1)^{s-r}\ {}^nC_s \sum_{t=s-r}^{t=s} (-1)^{t-s+r} \frac{s!}{t!\,(s-t)!}\ {}^{n-s}C_{r+t-s}$

$= (-1)^{s-r}\ {}^nC_s\ p_{s,r}$

$= (-1)^{s+r}\ {}^nC_s\ p_{s,r}$

Similarly the result follows if $r > s$ and is obvious if $r = s$.

There is an alternative form in which this may be put.

Since $p_{s,r} = (-1)^{n-s} p_{s,n-r}$

$$\begin{aligned}&[p_{s,r}\{\pm(2n\bar{x}+n-2r)^{3n-s-1}\}+\\&p_{s,n-r}\{\pm(2n\bar{x}-n+2r)^{3n-s-1}\}]\\&=p_{s,r}[\{\pm(2n\bar{x}+n-2r)^{3n-s-1}\}+\\&\{\pm(-2n\bar{x}+n-2r)^{3n-s-1}\}]\end{aligned}$$

Whence we may write

$$y=\frac{n\,.\,6^n}{2^{2n}}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^{n-s}\,{}^nC_s}{(3n-s-1)\,!}\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}p_{s,r}\,f(r,\bar{x})$$

where $f(r,\bar{x})=\{\pm(2n\bar{x}+n-2r)^{3n-s-1}$

$\pm(-2n\bar{x}+n-2r)^{3n-s-1}\}$ if n is odd

and

$$y=\frac{n\,.\,6^n}{2^{2n}}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^{n-s}\,{}^nC_s}{(3n-s-1)\,!}\left\{\begin{array}{l}\pm\,p_{s,\frac{n}{2}}(2n\bar{x})^{3n-s-1}\\+\sum_{s=0}^{\frac{n}{2}-1}p_{s,r}\,f(r,\bar{x})\end{array}\right\}$$ if n is even (26 *bis*)

a form first deduced from the trigonometrical expression for the Type II case previously established, and somewhat analogous to the solution obtained for the rectangle. In practice it is easier to substitute directly for n in (25) above, expand, and then integrate rather than to use the general solution which of course leads to the same results. On putting $n = 2, 3, 4$ in succession we find :—

Samples of 2.

$$y=36\,\Sigma\,\lambda_{a,s}\,\frac{(2\bar{x}+a)^s}{s\,!}$$

TABLE VII. ... $\lambda_{a,s}$ $(p=2,\ q=2,\ n=2)$.

a	s		
	5	4	3
-1	-4	-4	-1
0	∓ 8	...	± 2
1	$+4$	-4	$+1$

..... (27)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(2\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

Samples of 3.

$$y = 324 \Sigma \lambda_{a,s} \frac{(3\bar{x} + a)^s}{s!}$$

TABLE VIII. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 2, q = 2, n = 3)$.

a	s			
	8	7	6	5
$-\frac{3}{2}$	— 8	— 12	— 6	— 1
$-\frac{1}{2}$	∓ 24	∓ 12	± 6	± 3
$\frac{1}{2}$	± 24	∓ 12	∓ 6	± 3
$\frac{3}{2}$	— 8	+ 12	— 6	+ 1

..... (28)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(3\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

Samples of 4.

$$y = 2592 \Sigma \lambda_{a,s} \left(\frac{4\bar{x} + a}{s!}\right)^s$$

TABLE IX. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 2, q = 2, n = 4)$.

a	s				
	11	10	9	8	7
— 2	— 16	— 32	— 24	— 8	— 1
— 1	∓ 64	∓ 64	—	± 16	± 4
0	± 96	...	∓ 48	...	± 6
1	∓ 64	± 64	...	∓ 16	± 4
2	+ 16	— 32	+ 24	— 8	+ 1

..... (29)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(4\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

(vi) $p = 2, q = 3$

The population curve is

$$y = 12x(1-x)^2$$

We have

$$\left[\frac{M_{-\frac{1}{2},\,2}^{(-\alpha)}}{(-\alpha)^{\frac{5}{2}}}\right] = 12e^{-\frac{1}{2}\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{4}{\alpha^3} + \frac{6}{\alpha^4}\right) + 24e^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{3}{\alpha^4}\right)$$

$$= \frac{12}{\alpha^4}\left[e^{-\frac{1}{2}\alpha}(6 + 4\alpha + \alpha^2) - 2e^{\frac{1}{2}\alpha}(3-\alpha)\right]$$

and the distribution of means is

$$y = \frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\beta\bar{x}}\left[\left\{\frac{12}{(i\beta)^4}\right\}e^{-\frac{1}{2}i\beta}(6 + 4i\beta + (i\beta)^2) - \right.$$

$$\left. - 2e^{\frac{1}{2}i\beta}(3 - i\beta)\right\}\Big]^n d\beta$$

On putting $n = 2, 3, 4$ in succession we obtain

Samples of 2.

$$y = 12^2 \Sigma \lambda_{a,s} \frac{(2\bar{x} + a)^s}{s!}$$

TABLE X. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 2,\ q = 3,\ n = 2)$.

a	s				
	7	6	5	4	3
— 1	— 36	— 24	— 4	...	...
0	∓ 72	± 24	± 4	∓ 4	...
1	+ 36	— 48	+ 28	— 8	+ 1

..... (30)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(2\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

Samples of 3.

$$y = \frac{3.12^3}{2} \Sigma \lambda_{a,s} \frac{(3\bar{x} + a)^s}{s!}$$

TABLE XI. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 2, q = 3, n = 3)$.

a	s						
	11	10	9	8	7	6	5
$-\frac{3}{2}$	+ 216	+ 216	+ 72	+ 8	...	...	...
$-\frac{1}{2}$	± 648	...	∓ 108	± 24	± 12	...	...
$\frac{1}{2}$	∓ 648	± 648	∓ 216	∓ 24	± 30	∓ 6	...
$\frac{3}{2}$	+ 216	− 432	+ 396	− 208	+ 66	− 12	+ 1

..... (31)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(3\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

Samples of 4.

$$y = 2\,(12)^4 \Sigma \lambda_{a,s} \frac{(4\bar{x} + a)^s}{s!}$$

TABLE XII. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 2, q = 3, n = 4)$.

a	s								
	15	14	13	12	11	10	9	8	7
− 2	− 1,296	− 1,728	− 864	− 192	− 16	...	...	...	...
− 1	∓ 5,184	∓ 1,728	± 864	± 96	∓ 160	∓ 32	...	...	...
0	± 7,776	∓ 5,184	...	± 1,152	∓ 264	∓ 48	± 24	...	...
1	∓ 5,184	± 8,640	∓ 6,048	± 1,824	± 80	∓ 240	± 72	∓ 8	...
2	+ 1,296	− 3,456	+ 4,320	− 3,264	+ 1,624	− 544	+ 120	− 16	+ 1

..... (32)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(4\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

(vii) $p = 2,\ q = 4$.

The population curve is

$$y = 20\, x\,(1 - x)^3$$

We have

$$\left[\frac{M_{-1,\frac{5}{2}}(-\alpha)}{(-\alpha)^3}\right] = \frac{20}{\alpha^5}\Big\{-6\,e^{\frac{1}{2}\alpha}(4-\alpha) + \\ + e^{-\frac{1}{2}\alpha}(24 + 18\,\alpha + 6\,\alpha^2 + \alpha^3)\Big\}$$

whence the distribution of means is given by

$$y = \frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,n\,\beta\bar{x}}\left[\frac{20}{(i\,\beta)^5}\Big\{-6\,e^{\frac{1}{2}i\beta}(4 - i\,\beta) + \right. \\ \left. + e^{-\frac{1}{2}i\beta}(24 + 18\,(i\,\beta) + 6(i\,\beta)^2 + (i\,\beta)^3)\Big\}\right]^n d\,\beta \qquad \ldots\ldots (33)$$

On putting $n = 2,\ 3,\ 4$ in succession we obtain :—

Samples of 2.

$$y = 20^2\,\Sigma\,\lambda_{a,s}\,\frac{(2\bar{x} + a)^s}{s\,!}$$

TABLE XIII. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 2,\ q = 4,\ n = 2)$.

a	s						
	9	8	7	6	5	4	3
— 1	— 576	— 288	— 36	...	...	...	...
0	∓ 1,152	± 576	∓ 72	∓ 24	± 12	...	...
1	+ 576	— 864	+ 612	— 264	+ 72	— 12	+ 1

..... (34)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(2x + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

Samples of 3.

$$y = \frac{3}{2}(20)^3 \Sigma \lambda_{a,s} \frac{(3\bar{x} + a)^s}{s!}$$

TABLE XIV. ... $\lambda_{a,s}$ ($p = 2$, $q = 4$, $n = 3$).

a	s									
	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
$-\frac{3}{2}$	—13,824	—10,368	— 2,592	— 216	...	...	...	...	...	...
$-\frac{1}{2}$	∓41,472	±10,368	± 2,592	∓ 1,512	± 216	± 108	...	...	...	...
$\frac{1}{2}$	±41,472	∓51,840	±28,512	∓ 7,992	± 432	± 432	∓ 144	± 18	...	...
$\frac{3}{2}$	—13,824	+31,104	—33,696	+23,112	—11,016	+ 3,780	— 936	+ 162	— 18	+ 1

..... (35)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(3\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

Samples of 4.

$$y = 2(20)^4 \Sigma \lambda_{a,s} \frac{(4\bar{x} + a)^s}{s!}$$

TABLE XV. ... $\lambda_{a,s}$ ($p = 2$, $q = 4$, $n = 4$).

a	s				
	19	18	17	16	15
— 2	— 331,776	— 331,776	— 124,416	— 20,736	— 1,296
— 1	∓ 1,327,104	...	± 165,888	∓ 27,648	∓ 5,184
0	± 1,990,656	∓ 1,990,656	± 746,496	∓ 41,472	∓ 75,168
1	∓ 1,327,104	± 2,654,208	∓ 2,488,320	± 1,410,048	∓ 502,848
2	+ 331,776	— 995,328	+ 1,451,520	— 1,361,664	+ 913,680

s							
14	13	12	11	10	9	8	7
...	...	...	...	...	...	...	...
± 5,184	± 864	...	...	...	...	...	...
± 25,920	∓ 1,728	∓ 864	± 216	...	...	...	...
± 98,496	± 864	∓ 6,912	± 2,160	∓ 336	± 24	...	...
— 461,376	+ 179,712	— 54,432	+ 12,744	— 2,256	+ 288	— 24	+ 1

..... (36)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(4\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

(viii) $p = 3,\ q = 3.$

This is the case of the symmetrical Type II curve

$$y = 30\,x^2\,(1 - x)^2$$

We have

$$\left[\frac{M_{0,\frac{1}{2}}(-\alpha)}{(-\alpha)^3}\right] = \frac{60}{\alpha^5}\left[e^{\frac{\alpha}{2}}(12 - 6\alpha + \alpha^2) - e^{-\frac{\alpha}{2}}(12 + 6\alpha + \alpha^2)\right]$$

and the distribution of means is given by

$$y = \frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\beta\bar{x}}\left[\frac{60}{(i\beta)^5}\left\{e^{\frac{i\beta}{2}}(12 - 6i\beta + (i\beta)^2)\right.\right.$$
$$\left.\left. - e^{\frac{i\beta}{2}}(12 + 6i\beta + (i\beta)^2)\right\}\right]^n d\beta \qquad \ldots\ldots 37$$

On putting $n = 2,\ 3,\ 4$ is succession we obtain :—

Samples of 2.

$$y = 60^2\,\Sigma\,\lambda_{a,s}\frac{(2\bar{x} + a)^s}{s!}$$

TABLE XVI. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 3,\ q = 3,\ n = 2)$.

a	s				
	9	8	7	6	5
— 1	— 144	— 144	— 60	— 12	— 1
0	∓ 288	...	± 24	...	∓ 2
1	+ 144	— 144	+ 60	— 12	+ 1

$\ldots\ldots (38)$

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(2\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

Samples of 3.

$$y = \frac{3}{2}(60)^3 \Sigma \lambda_{a,s} \frac{(3\bar{x} + a)^s}{s!}$$

TABLE XVII. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 3,\ q = 3,\ n = 3)$.

a	s						
	14	13	12	11	10	9	8
$-\frac{3}{2}$	+ 1,728	+ 2,592	+ 1,728	+ 648	+ 144	+ 18	+ 1
$-\frac{1}{2}$	± 5,184	± 2,592	...	∓ 216	...	± 18	± 3
$+\frac{1}{2}$	∓ 5,184	± 2,592	...	∓ 216	...	± 18	∓ 3
$+\frac{3}{2}$	+ 1,728	− 2,592	+ 1,728	− 648	+ 144	− 18	+ 1

..... (39)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(3\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

Samples of 4.

$$y = 2(60)^4 \Sigma \lambda_{a,s} \frac{(4\bar{x} + a)^s}{s!}$$

TABLE XVIII. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 3,\ q = 3,\ n = 4)$.

a	s								
	19	18	17	16	15	14	13	12	11
−2	− 20,736	− 41,472	− 38,016	− 20,736	− 7,344	− 1,728	− 264	− 24	− 1
−1	∓ 82,944	∓ 82,944	∓ 27,648	...	± 1,728	...	∓ 192	∓ 48	∓ 4
0	± 124,416	...	∓ 20,736	...	± 2,592	...	∓ 144	...	± 6
1	∓ 82,944	± 82,944	∓ 27,648	...	± 1,728	...	∓ 192	± 48	∓ 4
2	+ 20,736	− 41,472	+ 38,016	− 20,736	+ 7,344	− 1,728	+ 264	− 24	+ 1

..... (40)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(4\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

(ix) $p = 3,\ q = 4.$

The population curve is given by $y = 15x^2\,(1-x)^3$. We have

$$\left[\frac{M_{-\frac{1}{2},3}(-\alpha)}{(-\alpha)^{\frac{7}{2}}}\right] = \frac{120}{\alpha^6}\left[3\,e^{\frac{1}{2}\alpha}(20 - 8\alpha + \alpha^2) - \right.$$

$$\left. - e^{-\frac{1}{2}\alpha}(60 + 36\alpha + 9\alpha^2 + \alpha^3)\right]$$

and the distribution of means is given by

$$y = \frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\beta\bar{x}}\left[\frac{120}{(i\beta)^6}\left\{3\,e^{\frac{1}{2}i\beta}(20 - 8\beta + (i\beta)^2)\right.\right.$$

$$\left.\left. - e^{-\frac{1}{2}i\beta}(60 + 36(i\beta) + 9(i\beta)^2 + (i\beta)^3)\right\}\right]^n d\beta$$

$$\ldots\ldots(41)$$

Putting $n = 2, 3, 4$ in succession we obtain the results tabulated in Tables XIX, XX and XXI.

Samples of 2.

$$y = (120)^2\,\Sigma\,\lambda_{a,s}\frac{(2\bar{x} + a)^s}{s\,!}$$

TABLE XIX. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 3,\ q = 4,\ n = 2)$

a	s						
	11	10	9	8	7	6	5
— 1	— 3,600	— 2,880	— 936	— 144	— 9	...	...
0	∓ 7,200	± 1,440	± 288	∓ 96	∓ 6	± 6	...
1	+ 3,600	— 4,320	+ 2,376	— 768	+ 153	— 18	+ 1

$$\ldots\ldots(42)$$

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(2\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

Samples of 3.

$$y = \frac{3}{2}(120)^3 \Sigma \lambda_{a,s} \frac{(3\bar{x} + a)^s}{s!}$$

TABLE XX. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 3,\ q = 4,\ n = 3)$.

a	s			
	17	16	15	14
$-\frac{3}{2}$	— 216,000	— 259,200	— 136,080	— 39,744
$-\frac{1}{2}$	∓ 648,000	∓ 12,960	± 45,360	± 8,208
$\frac{1}{2}$	± 648,000	∓ 518,400	± 149,040	∓ 6,048
$\frac{3}{2}$	— 216,000	+ 388,800	— 330,480	+ 174,096

s					
13	12	11	10	9	8
— 6,804	— 648	— 27	...	...	...
∓ 2,700	∓ 108	± 189	± 27	...	...
∓ 6,372	± 864	± 261	∓ 90	± 9	...
— 62,532	+ 15,876	— 2,853	+ 351	— 27	+ 1

..... (43)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(3\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

Samples of 4.

$$y = 2(120)^4 \Sigma \lambda_{a,s} \frac{(4\bar{x} + a)^s}{s!}$$

TABLE XXI. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 3,\ q = 4,\ n = 4)$.

a	s				
	23	22	21	20	19
— 2	— 12,960,000	— 20,736,000	— 15,033,600	— 6,428,160	— 1,770,336
— 1	∓ 51,840,000	∓ 31,104,000	∓ 3,110,400	± 1,589,760	± 228,096
0	± 77,760,000	∓ 31,104,000	∓ 3,110,400	± 3,317,760	∓ 160,704
1	∓ 51,840,000	± 72,576,000	∓ 44,582,400	± 14,722,560	∓ 2,260,224
2	+ 12,960,000	— 31,104,000	+ 35,769,600	— 26,058,240	+ 13,382,496

(*continued*)

s							
18	17	16	15	14	13	12	11
— 321,408	— 37,584	— 2,592	— 81	...	...	...	...
∓ 62,208	± 864	± 7,776	± 1,620	± 108	...	...	...
∓ 238,464	± 34,560	± 6,912	∓ 1,674	∓ 108	± 54	...	...
∓ 103,680	± 88,992	± 864	∓ 7,020	± 1,860	∓ 228	± 12	...
— 5,101,056	+ 1,479,600	— 329,184	+ 55,809	— 7,044	+ 630	— 36	+ 1

. . . . . (44)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(4\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

(x) $p = 4, q = 4$.

The population curve is here the symmetrical Type II curve

$$y = 140\, x^3 (1 - x)^3$$

We have

$$\left[\frac{M_{0,\frac{7}{2}}(-\alpha)}{(-\alpha)^4}\right] = \frac{840}{\alpha^7}\left[e^{-\frac{1}{2}}(120 + 60\alpha + 12\alpha^2 + \alpha^3) - \right.$$
$$\left. - e^{\frac{1}{2}\alpha}(120 - 60\alpha + 12\alpha^2 - \alpha^3)\right]$$

and the distribution of means is given by

$$y = \frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\beta\bar{x}}\left[\frac{840}{(i\beta)^7}\left\{e^{-\frac{1}{2}i\beta}(120 + 60i\beta + 12(i\beta)^2 + (i\beta)^3)\right.\right.$$
$$\left.\left. - e^{\frac{1}{2}i\beta}(120 - 60i\beta + 12(i\beta)^2 - (i\beta)^3)\right\}\right]^n d\beta$$

. . . . . (45)

Putting $n = 2, 3, 4$ in succession we obtain the results tabulated in Tables XXII, XXIII, and XXIV.

Samples of 2.

$$y = (840)^2 \Sigma\, \lambda_{a,s} \frac{(2\bar{x} + a)^s}{s!}$$

TABLE XXII. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 4,\ q = 4,\ n = 2)$.

a	s						
	13	12	11	10	9	8	7
— 1	— 14,400	— 14,400	— 6,480	— 1,680	— 264	— 24	— 1
0	∓ 28,800	...	± 1,440	...	∓ 48	...	± 2
1	+ 14,400	— 14,400	+ 6,480	— 1,680	+ 264	— 24	+ 1

. . . . . (46)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(2\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

Samples of 3.

$$y = \frac{3}{2}(840)^3 \Sigma \lambda_{a,s} \frac{(3\bar{x} + a)^s}{s!}$$

TABLE XXIII. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 4,\ q = 4,\ n = 3)$.

a	s			
	20	19	18	17
$-\frac{3}{2}$	— 1,728,000	— 2,592,000	— 1,814,400	— 777,600
$-\frac{1}{2}$	∓ 5,184,000	∓ 2,592,000	∓ 259,200	± 86,400
$\frac{1}{2}$	± 5,184,000	∓ 2,592,000	± 259,200	± 86,400
$\frac{3}{2}$	— 1,728,000	+ 2,592,000	— 1,814,400	+ 777,600

s					
16	15	14	13	12	11
— 224,640	— 45,360	— 6,408	— 612	— 36	— 1
± 17,280	∓ 2,160	∓ 504	± 108	± 36	± 3
∓ 17,280	∓ 2,160	± 504	± 108	∓ 36	± 3
— 224,640	+ 45,360	— 6,408	+ 612	— 36	+ 1

.....(47)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(3\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

Samples of 4.

$$y = 2(840)^4 \Sigma \lambda_{a,s} \frac{(4\bar{x} + a)^s}{s!}$$

TABLE XXIV. ... $\lambda_{a,s}$ $(p = 4,\ q = 4,\ n = 4)$.

a	s				
	27	26	25	24	23
— 2	— 207,360,000	— 414,720,000	— 393,984,000	— 235,008,000	— 97,977,600
— 1	∓ 829,440,000	∓ 829,440,000	∓ 331,776,000	∓ 55,296,000	± 2,073,600
0	±1,244,160,000	...	∓1,244,160,000	...	± 7,257,600
1	∓ 829,440,000	± 829,440,000	∓ 331,776,000	± 55,296,000	± 2,073,600
2	+ 207,360,000	— 414,720,000	+ 393,984,000	— 235,008,000	+ 97,977,600

(continued).

22	21	20	19	18	17	16	15
— 30,067,200	— 6,963,840	— 1,226,880	— 163,296	— 16,032	— 1,104	— 48	— 1
± 2,073,600	± 138,240	∓ 34,560	± 3,456	± 4,416	± 960	± 96	± 4
...	∓ 380,160	...	± 12,096	...	∓ 288	...	± 6
∓ 2,073,600	± 138,240	± 34,560	± 3,456	± 4,416	± 960	∓ 96	± 4
— 30,067,200	+ 6,963,840	— 1,226,880	+ 163,296	— 16,032	+ 1,104	— 48	+ 1

..... (48)

Where the ambiguous sign occurs the upper sign is to be taken if $(4\bar{x} + a)$ is positive and the lower sign if it is negative.

(C). *Moments of the Distribution of Means.*

The moments about its own mean of the distribution of means may be obtained in a variety of ways.

The simplest however seems to be to make use of the following relations (*):

$$M_2 = \frac{\mu_2}{n}$$

$$M_3 = \frac{\mu_3}{n^2}$$

$$M_4 - 3M_2^2 = \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3}$$

$$M_5 - 10 M_3 M_2 = \frac{\mu_5 - 10 \mu_3 \mu_2}{n^4}$$

$$M_6 - 15 M_4 M_2 + 10 M_3^2 = \frac{\mu_6 - 15 \mu_4 \mu_2 + 10 \mu_3^2}{n^5}$$

(*) See for instance (16), *p.* 243.
These results are most generally expressed by the relation

$$\varkappa(1^r) = \frac{\varkappa_r}{n^{r-1}}$$

where $\varkappa(1^r)$ is the r^{th} semi-invariant of the distribution of means, $\varkappa_r$, the r^{th} semi-invariant of the population.

$$M_7 - 21\,M_5\,M_2 - 35\,M_4\,M_3 + 210\,M_3\,M_2^2 = \\ = \frac{\mu_7 - 21\,\mu_5\,\mu_2 - 35\,\mu_4\,\mu_3 + 210\,\mu_3\,\mu_2^2}{n^6} \qquad \ldots\ldots(49)$$

where M_s denotes the s^{th} moment about its own mean of the destribution of means, μ_s of the population.

The first four moments of the distribution of means of Type I

$$y = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\,x^{p-1}(1-x)^{q-1}$$

will now be obtained :— For this case Pearson has given the results :—

$$\mu_2 = \frac{\varepsilon\,b^2}{r^2(r+1)}$$

$$\mu_3 = \frac{2(q-p)\,\varepsilon\,.\,b^3}{r^3(r+1)(r+2)}$$

$$\mu_4 = \frac{3\varepsilon(2r^2 + r - 6\varepsilon)\,.\,b^4}{r^4(r+1)(r+2)(r+3)}$$

where $\varepsilon = pq, r = p+q$ and b is in this case unity, being the range of the curve.

Hence we obtain

$$M_2 = \frac{1}{n}\,\frac{\varepsilon\,b^2}{r^2(r+1)}$$

$$M_3 = \frac{2}{n^2}\,\frac{(q-p)\,\varepsilon\,.\,b^3}{r^3(r+1)(r+2)}$$

$$M_4 - 3M_2^2 = \frac{6\varepsilon}{n^3}\left\{\frac{r^2(r+1) - \varepsilon(5r+6)}{r^4(r+1)^2(r+2)(r+3)}\right\}b^4$$

or

$$M_4 = \frac{6\varepsilon\{r^2(r+1) - \varepsilon(5r+6)\} + 3n\varepsilon^2(r+2)(r+3)}{n^3 r^4(r+1)^2(r+2)(r+3)}\,b^4 \qquad \ldots\ldots(51)$$

and

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{4(q-p)^2(r+1)}{n\varepsilon(r+2)^2} \\ B_2 &= 3 + \frac{6\{r^2(r+1) - \varepsilon(5r+6)\}}{n\varepsilon(r+2)(r+3)} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(52)$$

For the symmetrical Type II case $p = q$, the latter reduces to

$$B_1 = 0$$

$$B_2 = 3 - \frac{6}{n(2p+3)} \qquad \ldots\ldots(52\text{ bis})$$

and the approach to normality with increasing size of sample is rapid.

(D) *Summary to Part I.*

(i) The distribution of the means of random samples of n from a population, supposed indefinitely large of the Type

$$y = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\ \Gamma(q)}\, x^{p-1}(1-x)^{q-1}$$

is given by

$$y = \frac{n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\beta\bar{x}} \left\{ \frac{M_{\frac{1}{2}(p-q),\ \frac{1}{2}(p+q-1)}(-i\beta)}{(-i\beta)^{\frac{1}{2}(p+q)}} \right\}^n d\beta$$

$$\text{where } -\frac{1}{2} < \bar{x} < \frac{1}{2}$$

the origin of this distribution being at the centre of the range, where $M_{k,m}(z)$ is the confluent hypergeometric function defined by

$$M_{k,m}(z) = z^{\frac{1}{2}+m} e^{-\frac{1}{2}z} \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}+m-k\right)z}{1!\,(2m+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{1}{2}+m-k\right)\left(\frac{3}{2}+m-k\right)z^2}{2!\,(2m+1)(2m+2)} + \cdots\cdots \right\}$$

This will be true for all values of p and q admissible in Type I distributions provided that the integral involved is zero when x is greater than $\frac{1}{2}$ or less than $-\frac{1}{2}$. This has only been proved for p, q positive integers when p and q are unequal but, in a previous paper, for all admissible values of p and q when p and q are equal. It is presumably true for all admissible values of p and q equal or unequal, but the development of the expression in this paper is confined to the case where p and q are positive integers.

(ii) When p and q are positive integers the above expression is integrable and the distribution of means has been shown to consist of arcs of parabolae of degree $n(p+q-1)-1$ joining at the points

$$x = 0, \pm\frac{1}{n} \pm \frac{2}{n}, \cdots\cdots \pm \frac{n-2}{2n} \quad \text{when } n \text{ is even}$$

and $\bar{x} = \pm \frac{1}{2n}, \pm \frac{3}{2n}, \pm \frac{5}{2n}, \ldots\ldots \pm \frac{n-2}{2n}$ when n is odd.

and having contact of order not less than $nt - 2$, at the above points, t being the smaller of p and q.

The cases $p = 1, 2, 3, 4$; $q = 1, 2, 3, 4$; $n = 2, 3, 4$ have been considered in detail.

It is interesting to note that these cases, when p or q is unity, include certain transitional J types of population with a finite ordinate at one end of the range and that the distribution of means of these types are curves with a zero ordinate at both ends of the range.

(iii) The region in which p or q or both lie between 0 and 1, that is in the region of the J and U curves has not so far been explored. For $p = q = \frac{1}{2}$, a symmetrical U curve, the distribution of means is given by

$$y = \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ J_0\left(\frac{\beta}{2}\right) \right\}^n \cos(n\bar{x}\beta)\, d\beta$$

an expression which has not so far been developed in a convenient form.

(iv) The first four moments of the distribution of means have been obtained and higher ones could be obtained if desired. The form of B_1 and B_2 shows of course that the distributions tend to the normal type as the size of sample becomes large and that this approach is rapid in the case of the symmetrical Type II curves.

PART II.

The distribution of the means of samples from Pearson's type VII for integral values of m.

(A) *The General Solution.*

In the relation (1)

$$\left(\int_a^b f(x)\, e^{\alpha x}\, dx \right)^n = \int_{na}^{nb} \psi(x)\, e^{\alpha x}\, dx$$

where $y = f(x)$ is the original frequency distribution with range from $x = a$ to $x = b$ and $Y = \psi(x)$ the distribution of means, we now put $\alpha = i\beta$

and
$$f(x) = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{(1 + x^2)^m}$$

the range being from $-\infty$ to ∞, obtaining

$$\left\{\frac{\Gamma(m)}{\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta x}}{(1 + x^2)^m}\, dx\right\}^n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{i\beta x}\, dx$$

But

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta x}}{(1 + x^2)^m}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \beta x\, dx}{(1 + x^2)^m} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \beta x\, dx}{(1 + x^2)^m}$$

and the latter integral is zero because $\sin \beta x$ is an odd function of x.

Thus the relation (1) may in this case be written

$$F(i\beta) = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(m)}{\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\cos \beta x\, dx}{(1 + x^2)^m}\right\}^n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cos \beta x\, dx \qquad \ldots\ldots (53)$$

whence it follows by FOURIER'S Integral Theorem that

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} F(i\beta) \cos \beta x\, dx \qquad \ldots\ldots (54)$$

Now it may be shown by contour integration that if m is an integer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \beta x\, dx}{(1 + x^2)^m} = \frac{\pi e^{-\beta}}{2^{2m-2}} \left\{\sum_{r=0}^{m-1} \frac{m(m+1)\ldots\ldots(m+r-1)}{r!\,(m-1-r)!} (2\beta)^{m-r-1}\right\}^{*}$$

(*) This may be proved as follows: —

Consider $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta x}\, dx}{\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^m}$ where m is a positive integer. First suppose

$$= \frac{\pi e^{-\beta}}{2^{2m-2}} \left\{ \frac{(2\beta)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{m(2\beta)^{m-2}}{1!(m-2)!} + \ldots\ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{m(m+1)\ldots(m+r-1)}{r!(m-1-r)!}(2\beta)^{m-r-1} \ldots\ldots + \frac{m(m+1)\ldots(2m-2)}{(m-1)!} \right\}$$

$\ldots\ldots$ (55)

$\beta > o$ and consider $\int_c \frac{e^{i\beta z}\,dz}{\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^m}$, c being a semi-circular contour BAC of radius R and centre at the origin.

The only singularity of the integrand within the contour is at $P(z = ia)$ $a > o$.

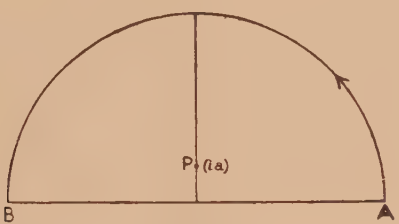

FIG. 2.

Hence $$\int_c \frac{e^{i\beta z}\,dz}{\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^m} = 2\pi i \text{ (residue at } P).$$

Consider $$\int_{ACB} \frac{e^{i\beta z}\,dz}{\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^m}$$ Let $z = Re^{i\theta}$ on ACB.

Then on ACB

$$\left| \frac{e^{i\beta z}}{\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^m} \right| \leq \frac{e^{-R\beta\sin\theta}}{\left(\frac{R^2}{a^2}-1\right)^m} \leq \frac{Ae^{-R\beta\sin\theta}}{R}$$

where A is a positive constant, for sufficiently large values of R.

Hence $$\int_{ACB} \frac{e^{i\beta z}dz}{\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^m} \to 0$$ as $R \to \infty$

Thus

$$F(i\beta) = \left\{ \frac{\Gamma(m)}{\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right\}^n \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \beta x \, dx}{(1+x^2)^m} \right\}^n$$

$$= e^{-n\beta} \sum_{r=0}^{n(m-1)} A_r \beta^r$$

And

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta x} dx}{\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^m} = 2\pi i \quad \text{(residue at } P\text{)}$$

To calculate the residue we put $z = ia + t$ in $\dfrac{e^{i\beta z}}{\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^m}$ and pick out the coefficient of $\frac{1}{t}$.

Now

$$\frac{e^{i\beta z}}{\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^m} = \frac{a^{2m} e^{-a\beta} e^{i\beta t}}{(2ia)^m t^m \left(1+\frac{t}{2ia}\right)^m}$$

$$= \frac{a^m}{(2i)^m} \frac{e^{a\beta} e^{i\beta t}}{t^m} \left(1 - \frac{mt}{2ia} + \ldots + \frac{(-1)^s m(m+1)\ldots(m+s-1)}{(2ia)^s s!} t^s + \ldots\right)$$

whence the integral is equal to

$$\frac{\pi}{2^{2m-2}} a e^{-a\beta} \left\{ \frac{(2a\beta)^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots \frac{m(m+1)\ldots(m+s-1)}{s!(m-1-s)!} (2a\beta)^{m-s-1} + \right.$$
$$\left. \ldots\ldots + \frac{m(m+1)\ldots(2m-2)}{(m-1)!} \right\}$$

If β were negative we should have to take the contour below the real axis and we should have

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta z} dx}{\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^m} = -2\pi i \text{ (residue at } z = -ia)$$

$$= \frac{\pi(-1)^{m-1}}{2^{2m-2}} a e^{a\beta} \left\{ \frac{(2a\beta)^{m-1}}{(m-1)!} - \frac{m(2a\beta)^{m-2}}{1!(m-2)!} + \right.$$

$$+ \ldots\ldots \frac{(-1)^s m(m+1)\ldots\overline{m+s+1}}{s!(m-1-s)!} (2\beta)^{m-s-1}$$

$$\left. + \ldots\ldots + \frac{(-1)^{m-1} m(m+1)\ldots(2m-2)}{(m-1)!} \right\}$$

where the coefficients A_r may be determined by substituting expression (55) for the integral in $F(i\beta)$ and expanding the multinomial. Thus

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sum_{r=0}^{n(m-1)} A_r \beta^r e^{-n\beta} \cos \beta x \, d\beta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{n(m-1)} A_r \int_0^\infty \beta^r e^{-n\beta} \cos \beta x \, d\beta \qquad \ldots\ldots (56)$$

Now it is known that when a, n are positive

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} \cos b x \, dx = \frac{\Gamma(n) \cos n\vartheta}{r^n}$$

where

$$r = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \quad \vartheta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \; (*)$$

Thus

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{n(m-1)} \frac{A_r \Gamma(r+1) \cos\left\{(r+1)\tan^{-1}\frac{x}{n}\right\}}{(n^2+x^2)^{\frac{r+1}{2}}}$$

The two results may be combined in the formula

$$\frac{\pi a}{2^{2m-2}} e^{-a|\beta|}\left\{\sum_{s=0}^{m-1} \frac{m(m+1)\ldots(m+s-1)}{s!\,(m-1-s)!}\left[2a|\beta|\right]^{m-s-1}\right\}$$

We may also write (whether m is an integer or not)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \beta x \, dx}{(1+x^2)^m} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta x} \, dx}{(1+x^2)^m} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \beta^{m-\frac{1}{2}}}{2^{m-\frac{3}{2}} \Gamma(m)} \frac{K_{m-\frac{1}{2}}(\beta)}{\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi}$$

were $K_{m-\frac{1}{2}}(\beta)$ is a modified BESSEL Function of the second kind. (See (15) pp. 367 and 377). This might have been expected by analogy with Type II previously discussed.

(*) (17) pag. 471.

and the distribution of means is given by

$$y = \frac{n}{\pi} \sum_{r=0}^{n(m-1)} \frac{A_r \Gamma(r+1) \cos\left\{(r+1)\tan^{-1}\bar{x}\right\}}{n^{r+1}(1+\bar{x}^2)^{\frac{r+2}{2}}}$$

$$= \frac{n}{\pi} \sum_{r=0}^{n(m-1)} \frac{A_r \Gamma(r+1) \cos\left\{(r+1)\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+\bar{x}^2}}\right\}}{n^{r+1}(1+\bar{x}^2)^{\frac{r+1}{2}}} \quad \ldots\ldots(57)$$

Now in virtue of the well known relations

$$\cos s\vartheta = (-1)^{\frac{s}{2}} \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\frac{s}{2}} \frac{(-1)^r s^2 (s^2-2^2)\ldots(s^2-\overline{2r-2}^2)\cos 2r\vartheta}{(2r+1)!} \right\}$$

if s is an even integer
and

$$\cos s\vartheta = (-1)^{\frac{s-1}{2}} \left\{ s\cos\vartheta + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=1}^{s-1} s \frac{(s^2-1^2)(s^2-3^2)\ldots(s^2-(2r-1)^2)}{(r+1)!} \cos^{2r+1}\vartheta \right\} \quad \ldots\ldots(58)$$

it follows at once that (57) may be put in a form which involves only negative integral powers of $(1+\bar{x}^2)$. The form of the distribution of means is thus the sum of a number of Type VII curves.

(B) *Particular Cases.*

We will now consider some particular cases

(i) $m = 1$

The population curve is $y = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$

Here $$\left[\frac{\Gamma(m)}{\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right]^n = \frac{1}{\pi^n}$$

Hence $A_0 = 1$ $A_r = 0$ for $r > 0$.
Therefore the distribution of means is given by

$$y = \frac{n}{\pi} \frac{\cos\tan^{-1}\bar{x}}{n(1+\bar{x}^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\bar{x}^2}$$

Thus the distribution of means in random samples of *any size* from the curve

$$y = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 + x^2)} \qquad \ldots\ldots (59)$$

is the curve itself. This remarkable fact has already been pointed out by R. A. FISHER (1_a) (*) and could not of course have arisen, were not the standard deviation of the original population and hence the standard deviation of the mean, infinite.

(ii) $m = 2$

The population curve is $y = \frac{2}{\pi} \frac{1}{(1 + x^2)^2}$

Here
$$F(i\beta) = \left\{ \frac{\pi e^{-\beta} (\beta + 1)}{\left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)} \right\}^n$$
$$= e^{-n\beta} (\beta + 1)^n$$
$$= \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r \beta^r e^{-n\beta}$$

Hence $A_r = {}^nC_r$

and the distribution of means is given by

$$y = \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1) \cos\left((r+1) \tan^{-1} \bar{x}\right)}{n^r (1 + \bar{x}^2)^{\frac{r+1}{2}}} \qquad \ldots\ldots (60)$$

Putting $n = 2, 3, 4$ in succession we obtain

Samples of 2.

$$y = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\cos \tan^{-1} \bar{x}}{(1 + \bar{x}^2)^{\frac{1}{2}}} + \cos \frac{(2 \tan^{-1} \bar{x})}{(1 + \bar{x}^2)} + \frac{\cos (3 \tan^{-1} \bar{x})}{4 (1 + \bar{x}^2)^{3/2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{5}{4 (1 + \bar{x}^2)^2} + \frac{1}{(1 + \bar{x}^2)^3} \right\} \qquad \ldots\ldots (61)$$

(*) Questa curva di distribuzione era già stata studiata dal CAUCHY nel 1853, e la proprietà accennata nel testo era anche precedentemente stata segnalata dal POISSON. (cfr. (13), p. 179). (*Nota della Redazione*).

Samples of 3.

$$y = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\cos\tan^{-1}\bar{x}}{(1+\bar{x}^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\cos(2\tan^{-1}\bar{x})}{(1+\bar{x}^2)} + \frac{2}{3}\frac{\cos(3\tan^{-1}\bar{x})}{(1+\bar{x}^2)^{\frac{3}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{9}\frac{\cos(4\tan^{-1}\bar{x})}{(1+\bar{x}^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{2}{9\pi}\left\{\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^2} + \frac{4}{(1+\bar{x}^2)^3} + \frac{8}{(1+\bar{x}^2)^4}\right\} \qquad \ldots\ldots(62)$$

Samples of 4.

$$y = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\cos\tan^{-1}\bar{x}}{(1+\bar{x}^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\cos(2\tan^{-1}\bar{x})}{(1+\bar{x}^2)} + \frac{3}{4}\frac{\cos(3\tan^{-1}\bar{x})}{(1+\bar{x}^2)^{\frac{3}{2}}}\right.$$

$$\left. + \frac{3}{8}\frac{\cos(4\tan^{-1}\bar{x})}{(1+\bar{x}^2)^2} + \frac{3}{32}\frac{\cos(5\tan^{-1}\bar{x})}{(1+\bar{x}^2)^{\frac{5}{2}}}\right\}$$

$$= \frac{1}{32\pi}\left\{\frac{4}{(1+\bar{x}^2)^2} + \frac{15}{(1+\bar{x}^2)^3} + \frac{36}{(1+\bar{x}^2)^4} + \frac{48}{(1+\bar{x}^2)^5}\right\}$$

We shall now write down the distribution of means for samples of 2, 3, 4 up to $p = 4$ and for samples of 2 up to $p = 8$. The process of reduction is in every case the same.

First $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\beta x\, dx}{(1+x^2)^m}$ is calculated from (55), then by squaring, cubing or raising to the 4th. power, as the case may be, and multiplying by $\left\{\frac{\Gamma(m)}{\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}^n$, $F(i\beta)$ is obtained. This gives the A's necessary for substitution in (57).

Then by means of the series for $\cos s\vartheta$, (57) is reduced to the simple form which involves only negative powers of $(1+\bar{x}^2)$.

The values of $F(i\ \beta)$ are as follows :—

m	Value of $F(i\ \beta)$
1	$e^{-n\beta}$
2	$e^{-n\beta}(1+\beta)^n$
3	$e^{-n\beta}\left(1+\beta+\frac{\beta^2}{3}\right)^n$
4	$e^{-n\beta}\left(1+\beta+\frac{2}{5}\beta^2+\frac{1}{15}\beta^3\right)^n$
5	$e^{-n\beta}\left(1+\beta+\frac{3}{7}\beta^2+\frac{2}{21}\beta^3+\frac{1}{105}\beta^4\right)^n$
6	$e^{-n\beta}\left(1+\beta+\frac{4}{9}\beta^2+\frac{1}{9}\beta^3+\frac{1}{63}\beta^4+\frac{1}{945}\beta^5\right)^n$
7	$e^{-n\beta}\left(1+\beta+\frac{5}{11}\beta^2+\frac{28}{231}\beta^3+\frac{2}{99}\beta^4+\frac{1}{495}\beta^5+\frac{1}{10395}\beta^6\right)^n$
8	$e^{-n\beta}\left(1+\beta+\frac{66}{143}\beta^2+\frac{55}{429}\beta^3+\frac{10}{429}\beta^4+\frac{2}{715}\beta^5+\right.$ $\left.+\frac{4}{19305}\beta^6+\frac{\beta^7}{135135}\right)^n$ ..... (64)

The A's may be obtained from these results and the subsequent reductions though somewhat laborious are simple. The final results will now be given. They have been checked by verifying in each case by direct integration that the total frequency is unity.

(iii) $m = 3$

The population curve is

$$y + \frac{8}{3\pi}\frac{1}{(1+x^2)^3}$$

Samples of 2.

$$y = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{6(1+\bar{x}^2)^3} + \frac{2}{3(1+\bar{x}^2)^4} + \frac{8}{3(1+\bar{x}^2)^5}\right\} \quad \ldots\ldots (65)$$

Samples of 3.

$$y = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{8}{243}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^3} + \frac{304}{2187}\frac{1}{(1+x^2)^4} + \frac{1024}{2187}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^5} + \right.$$
$$\left. + \frac{2560}{2187}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^6} + \frac{5120}{2187}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^7}\right\} \quad \ldots\ldots (66)$$

Samples of 4.

$$y = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{96}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^3} + \frac{11}{256}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^4} + \frac{67}{512}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^5} + \right.$$
$$\left. + \frac{65}{192}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^6} + \frac{25}{32}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^7} + \frac{35}{24}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^8} + \frac{35}{18}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^9}\right\}$$
$$\ldots\ldots (67)$$

(iv) $m = 4$

The population curve is

$$y = \frac{16}{5\pi}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^4}$$

Samples of 2.

$$y = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{20}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^4} + \frac{6}{25}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^5} + \frac{4}{5}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^6} + \frac{16}{5}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^7}\right\}$$
$$\ldots\ldots (68)$$

Samples of 3.

$$y = \frac{1}{164025\,\pi}\left\{\frac{720}{(1+\bar{x}^2)^4} + \frac{3712}{(1+\bar{x}^2)^5} + \frac{12544}{(1+\bar{x}^2)^6} + \frac{37888}{(1+\bar{x}^2)^7} + \right.$$
$$\left. + \frac{100352}{(1+\bar{x}^2)^8} + \frac{229376}{(1+\bar{x}^2)^9} + \frac{458752}{(1+\bar{x}^2)^{10}}\right\} \quad \ldots\ldots (69)$$

Samples of 4.

$$\frac{1}{2048000\,\pi}\left\{\frac{1600}{(1+\bar{x}^2)^4} + \frac{8160}{(1+\bar{x}^2)^5} + \frac{26760}{(1+\bar{x}^2)^6} + \frac{73767}{(1+\bar{x}^2)^7} + \frac{185724}{(1+\bar{x}^2)^8}\right.$$
$$\left. + \frac{438816}{(1+\bar{x}^2)^9} + \frac{983808}{(1+\bar{x}^2)^{10}} + \frac{2016000}{(1+\bar{x}^2)^{11}} + \frac{3548160}{(1+\bar{x}^2)^{12}} + \frac{4730880}{(1+\bar{x}^2)^{13}}\right\}$$
$$\ldots\ldots (70)$$

We add also the distributions for samples of 2 for the cases $m = 5, 6, 7, 8$.

Samples of 2.

(v) $m = 5$.

The population curve is

$$y = \frac{128}{35\pi}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^5}$$

The distribution of means is

$$y = \frac{1}{490\pi}\left\{\frac{7}{(1+\bar{x}^2)^5} + \frac{40}{(1+\bar{x}^2)^6} + \frac{144}{(1+\bar{x}^2)^7} + \frac{448}{(1+\bar{x}^2)^8} + \frac{1792}{(1+\bar{x}^2)^9}\right\} \quad \ldots\ldots (71)$$

(vi) $m = 6$

The population curve is

$$y = \frac{256\,\pi}{63}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^6}$$

The distribution of means is

$$y = \frac{1}{756\,\pi}\left\{\frac{3}{(1+\bar{x}^2)^6} + \frac{20}{(1+\bar{x}^2)^7} + \frac{80}{(1+\bar{x}^2)^8} + \frac{256}{(1+\bar{x}^2)^9} + \right.$$
$$\left. + \frac{768}{(1+\bar{x}^2)^{10}} + \frac{3072}{(1+\bar{x}^2)^{11}}\right\} \quad \ldots\ldots (72)$$

(vii) $m = 7$

The population curve is

$$y = \frac{1024}{231\,\pi}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^7}$$

The distribution of means is

$$y = \frac{1}{30492\,\pi}\left\{\frac{33}{(1+\bar{x}^2)^7} + \frac{252}{(1+\bar{x}^2)^8} + \frac{1120}{(1+\bar{x}^2)^9} + \frac{3840}{(1+\bar{x}^2)^{10}} + \right.$$
$$\left. + \frac{11520}{(1+\bar{x}^2)^{11}} + \frac{33792}{(1+\bar{x}^2)^{12}} + \frac{135168}{(1+\bar{x}^2)^{13}}\right\} \quad \ldots\ldots (73)$$

(viii) $m = 8$

The population curve is

$$y = \frac{2048}{429\,\pi}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^8}$$

The distribution of means is

$$y' = \frac{1}{490776\,\pi}\left\{\frac{143}{(1+\bar{x}^2)^8}+\frac{1232}{(1+\bar{x}^2)^9}+\frac{6048}{(1+\bar{x}^2)^{10}}+\frac{22400}{(1+\bar{x}^2)^{11}}+\right.$$
$$\left.+\frac{70400}{(1+\bar{x}^2)^{12}}+\frac{202752}{(1+\bar{x}^2)^{13}}+\frac{585728}{(1+\bar{x}^2)^{14}}+\frac{2342912}{(1+\bar{x}^2)^{15}}\right\} \quad \ldots\ldots (74)$$

(C) *Moments of the Distribution of Means.*

The moments of the Type VII curve

$$y = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,\frac{1}{(1+x^2)^m}$$

have been shown by PEARSON to be given by

$$\left.\begin{aligned}\mu_{2s+1} &= 0\\ \mu_{2s} &= \frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{3}{2}\right)\ldots\ldots\ldots\frac{1}{2}}{\left(m-\frac{3}{2}\right)\left(m-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(m-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}\right)}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (75)$$

whence we find

$$\mu_2 = \frac{1}{2m-3}$$

$$\mu_4 = \frac{3}{(2m-3)(2m-5)}$$

Whence using the method of p. 88 we find for the distribution of means

$$\left.\begin{aligned}M_2 &= \frac{1}{n(2m-3)}\\ M_4 - 3M_2^2 &= \frac{6}{n^3(2m-3)^2(2m-5)}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (76)$$

Whence

$$M_4 = \frac{1}{n^2(2m-3)^2}\left\{3+\frac{6}{n(2m-5)}\right\} \quad \ldots\ldots (77)$$

and we have

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= 0 \\ B_2 &= 3 + \frac{6}{n\,(2m-5)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (78)$$

so that the approach to normality with increasing size of sample is rapid.

(D) *Summary to Part II.*

(i). The distribution of the means of random samples of n from a population, supposed indefinitely large, of the Type

$$y = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{(1+x^2)^m}$$

is given for integral values of m by

$$y = \frac{n}{\pi} \sum_{r=0}^{n(m-1)} \frac{A_r\,\Gamma(r+1)\cos\left\{(r+1)\tan^{-1}\bar{x}\right\}}{n^{r+1}\,(1+\bar{x}^2)^{\frac{r+1}{2}}}$$

(ii). This may be expressed in a form which involves only negative integral powers of $\frac{1}{(1+\bar{x}^2)}$ the lowest power of $\frac{1}{(1+\bar{x}^2)}$ which occurs being the m^{th} and the highest the $\left\{n\,(m-1)+1\right\}^{th}$.

(iii). The cases $m = 1$ for all values of n; $m = 2, 3, 4$, $n = 2, 3, 4$; and $m = 5, 6, 7, 8$, $n = 2$ have been considered in detail.

(iv). For non-integral values of m the distribution is given by

$$y = \frac{1}{\pi}\left\{2^{m-\frac{3}{2}}\,\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)\right\}^{-n} \int_0^\infty \left\{\frac{\beta^{m-\frac{1}{2}}\,K_{m-\frac{1}{2}}(\beta)}{\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi}\right\}^n \cos\beta x\, d\beta$$

where $K_{m-\frac{1}{2}}(\beta)$ is a modified BESSEL function of the second kind, but this expression has not as yet been dealt with.

(v). The moments of the distribution of means are easily written down, and the approach to normality with increasing size of sample is rapid.

General summary.

(1) The present method of approach has now led to a complete solution of the problem of the distribution of means of random samples from populations of normal type and of Pearson's Type III $\left[y = y_0 e^{-\frac{px}{a}} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^p \right]$. The exponential curve may for this purpose be regarded as a particular case of Type III. See (14) p. 228.

(2) This method has also led to general expressions for the distribution of means of populations of Pearson's Types II, VII and I; but these expressions can only be integrated and reduced to an explicit form for integral values of the indices involved.

(3) It seems probable that further research on these lines will throw light on the distribution of means of the remaining Pearsonian Types also; but perhaps the main interest of the method employed is to show how, once we are given the moments of the sampling distribution of any moment function, we may proceed from these to the actual distribution itself, provided that the integral solution can be put into explicit form. This is undoubtedly the hardest part of the problem, but the fact that somewhat unpromising analytical forms have been dealt with here and that the recent comprehensive work of R. A. Fisher has made the moments of moment functions far more available than hitherto, opens up the prospect that the exact sampling distributions of many moment functions will ultimately be obtained.

REFERENCES

(1) R. A. Fisher. *Frequency distribution of the values of the correlation coefficient in samples from an indefinitely large population.* "Biometrika", V, 1914-15, pp. 507-521. See also *Editorial Appendix.*

(1a) R. A. Fisher. *The Mathematical Foundations of Theoretical Statistics* "Phil. Trans." A, Vol. 222, p. 322.

(2) "Student". *The probable error of a mean.* "Biometrika", Vol. VI, 1908-09, pp. 1-25.

(3) R. A. Fisher. *The goodness of fit of regression formulae and the distribution of regression coefficients.* "Journal of the Royal Statistics Society", Vol. LXXXV, Part IV, 1922, pp. 597-612.

(4) R. A. Fisher. *The distribution of the partial correlation coefficient.* "Metron", Vol. III, No. 3-4, 1924, pp. 329-332.

(5) R. A. FISHER. *The general sampling distribution of the multiple correlation coefficient.* " Proc. Roy. Soc. A, Vol. 121, 1928, pp. 654-673.

(6) K. PEARSON. *Researches on the mode of distribution of the constants of samples taken at random from a bivariate normal population.* " Proc. Roy. Soc. " A. Vol. 112, 1926, pp. 1-24.

(7) B. ROMANOVSKY. *On the distribution of the regression coefficient in samples from a normal population.* " Bulletin de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S. ", 1926, pp. 645-648. See also " Metron ", Vol. V, No. 4.

(8) J. WISHART. *The generalised product moment distribution in samples from a normal multivariate population.* " Biometrika ", Vol. XX A, 1928, pp. 32-52.

(9) K. PEARSON. *On the probable errors of frequency constants.* " Biometrika ", Vol. II, 1902-03, p. 273-281 and Vol. IX, 1913, pp. 1-10. *Further contributions to the theory of small samples.* " Biometrika " Vol. XVII, 1925, pp. 176-199.

(10) A. A. TCHOUPROFF. *On the mathematical expectation of the moments of frequency distributions.* " Biometrika ", Vol. XII, 1928-29, pp. 154-155, pp. 193-194.

(11) R. A. FISHER. *Moments and product moments of sampling distributions.* " Proc. Lond. Math. Soc. ", Vol. 30, 1929, pp. 199-238.

(12) J. WISHART. *A problem in combinatorial analysis giving the distribution of certain moment statistics.* " Proc. Lond. Math. Soc., Vol. 28, 1929, pp. 309-321, also " Proc. Roy. Soc. Edin. " Vol. XLIX, 1929, pp. 78-90.

(13) P. LEVY. *Calcul des Probabilités*, pp. 161-180.

(14) J. O. IRWIN. *On the frequency distribution of the means of samples having any law of frequency with finite moments with special reference to Pearson's Type II.* " Biometrika ", Vol. XIX, pp. 235-239.

(15) WHITTAKER and WATSON. *Modern Analysis.* 2nd Edition pp. 332, 333, 346, 367, 377, 402.

(16) P. HALL. *The distribution of means of samples of size* N *drawn from a population in which the variate takes values between* 0 *and* 1, *all such values being equally probable.* " Biometrika, " Vol. XIX, 1927, pp.240-245.

(17) G. GIBSON. *Elementary Treatise on the Calculus.* 2nd Edition, p. 471.

LOUIS I. DUBLIN and ALFRED J. LOTKA

The True Rate of Natural Increase of the Population of the United States
Revision on Basis of Recent Data.

It is now four years since the authors published their study of the " true " rate of natural increase of the population of the United States, that is, the natural rate of increase which would ultimately result from the actually prevailing fertility of women and from the current mortality, after the age distribution had had time to adjust itself to the form permanently compatible with the prevailing fertility and mortality. The study, as published, was built upon the vital statistics for the year 1920, in which a census of the United States was taken. In the meantime, the birthrate has fallen materially, while the deathrate has remained nearly stationary. In view of the great public interest aroused by our results, and the practical importance of the current trend in birthrates and deathrates, it has seemed very desirable to us to make a record of the figures for a series of recent years and to see how the changes in the fundamental vital characteristics of our population have affected its " true " rate of natural increase. It appears worth while to make an effort to find at least an approximate answer to this question, even though we are at present laboring under the disadvantage of being removed by over nine years from the last census, and being, therefore, rather poorly informed on certain fundamental features in the vital statistics of our population.

The basic facts for the population between 1920 and 1928 are shown in Table I below:

TABLE I. -- *Birthrate, Deathrate and Rate of Natural Increase. United States, Birth Registration Areas* 1920 *to* 1928, *White Persons.*

Year	Birthrate per 1,000 population * b	Deathrate per 1,000 population d	Rate of Natural increase b—d = r
1920	23.5	12.8	10.7**
1921	24.0	11.4	12.6
1922	22.2	11.6	10.6
1923	22.1	12.0	10.1
1924	22.2	11.3	10.9
1925	21.1	11.3	9.8
1926	20.3	11.7	8.6
1927	20.2	10.8	9.4
1928***	19.4	11.6	7.8

* Exclusive of stillbirths.

** For the female sex alone the corresponding figure is 10.9

*** Estimated on the basis of provisional reports relating to the total population (white and colored). A deduction of .3 in the birthrate and .5 in the deathrate was made to allow for exclusion of colored persons as these were found to be the differences consistently observed in preceding years.

Owing to the fact that statistics of births classified by age of the mother are published in quinquennial age groups, we can most conveniently make our computations for the year 1925. For, the mothers who had been, at the census of 1920, in the age group twenty to twenty-five, were comprised, in 1925, in the age group twenty-five to thirty, and so on throughout the quinquennial classification. The process followed consisted (see Table II) in first computing the age distribution of the (white) female population of reproducing ages in 1925, as it would issue out of that of 1920 under the prevailing mortality (the life table of 1925 being used). To the population in age groups thus computed there was then added an approximate correction for females entering as immigrants (in excess of emigration) since 1920, and surviving to 1925, in each of the age groups under consideration. The average net annual immigration for the five years 1920-1925 was used in this computation, and, since statistics

of births were, in this period, restricted to twenty-two states (inclusive of the District of Columbia) only that part of the immigration was counted, which had signified its intention to reside in these twentytwo states. For the age distribution of the net immigrants an average was used derived from statistics over the years 1925-1930 (*), figures for individual years of age being obtained by graphic interpolation and extrapolation from the broader age groups given in the statistics.

Having computed the age distribution of the female population of reproducing ages in 1925, the figures thus obtained were then employed as denominators in forming the quotients of births per 100,000 women in each of the quinquennial age groups of mothers. The corresponding numerators, *i. e.* births, are found in the Report on Birth Statistics for 1925 published by the Bureau of the Census (Part I, Table 4, page 100).

Having obtained the figures for the births per 100,000 women at several ages of life, the computation of the true rate of natural increase then follows identically the same lines as set forth in our previous publication and as set forth in Table II below, except that the life table for 1925 is now to be applied in determining the survival of the children born. The result of this computation is that the true rate of natural increase computed on the basis of the 1925 vital statistics is 4.3 per 1,000 per annum. In making a comparison of this figure of 4.3 with the 5.2 obtained for 1920 in our previous publication (**), it is necessary to bring the two figures to a comparable basis. The figure for 1920 relates to twenty-three states, that for 1925, to twenty-two states, the State of South Carolina having dropped out of the birth registration area. The inclusion of South Carolina is found to raise the birthrate in 1920 from 23.16 to 23.24, i. e. in the ratio

---

(*) The reason for the choice of these date limits was that more complete statistics of the age distribution of immigrants and emigrants were available after 1924 than previously. A preliminary examination of the statistics before and after 1924, considered over the broader age groups of the earlier period, indicated that the age distribution was essentially similar in the two periods.

(**) "Journal of the American Statistical Association", 1925, page 333. The figure there given is 5.5. This was computed on the basis of the population as of January first. It would have been more correct to base the computation on the population as of July first. The correction reduces the true rate of natural increase to 5.2.

TABLE II. — *Computation of Age Distribution of White Female Population and True Rate of Natural Increase, 1925, United States Birth Registration States as of 1920.*

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Age Group	of 100,000 born, survivors at center of age group l_x (1925) at 7.5 12.5, etc.	Ratio of successive l_x l 12.5/l 7.5 etc.	White female population 1920 22 States *	White female population 1920 Surviving to 1925, 22 States *	White female population 1925 (Survivors from 1920 plus Immigration) 22 States *	Daughters born in 1925 in 22 States * classified by age of mother	Maternity frequency $m(x)$ (daughters only) per 100,000 females per annum	Zero moment R_0 $\Sigma m(x)\, l_x$	First moment R_1 $\Sigma x\, m(x)\, l_x$	Second moment R_2 $\Sigma x^2 m(x)\, l_x$
5–9	92,411	.98598	2,908,965	—	—	—	—	—	—	—
10–14	91,760	.99296	2,692,161	2,888,486	2,933,442	349	12	11	138	1,725
15–19	90,851	.99009	2,449,636	2,665,482	2,746,763	60,778	2,213	2,011	35,193	615,878
20–24	89,446	.98454	2,528,271	2,411,765	2,564,779	177,204	6,909	6,180	139,050	3,128,625
25–29	87,836	.98200	2,497,467	2,482,762	2,633,776	174,500	6,625	5,819	160,023	4,400,633
30–34	86,080	.98001	2,222,390	2,447,543	2,516,438	127,975	5,086	4,378	142,285	4,624,263
35–39	84,008	.97593	2,064,694	2,168,897	2,209,662	78,560	3,555	2,986	111,975	4,199,063
40–44	81,536	.97057	1,754,104	2,003,930	2,035,182	26,453	1,300	1,060	45,050	1,914,625
45–49	78,516	.96296	1,539,773	1,689,132	1,716,723	2,455	143	112	5,320	252,700
50–54	74,597	.95009	1,319,356	1,642,923	1,485,737	44	3	2	105	5,513
						648,318	25,846	22,559	639,139	19,143,025
							× 5	× 5	× 5	× 5
							129,230	112,795	3,195,695	95,715,125

$\frac{R_1}{R_0} = \alpha = 28.332$ $\qquad \frac{R_2}{R_0} = 848.58$ $\qquad \alpha^2 = 802.70$

$\beta = \alpha^2 - \frac{R_2}{R_0} = -45.880$ $\qquad \log_e R_0 = \log_e 1.12795 = .12040$

$\frac{1}{2}\beta r^2 + \alpha r - \log_e R_0 = 0$**

$r = .00427$

* U. S. Birth Registration Area as of 1920, except Maine, for which classification of births by age of mother is not given, and South Carolina, for which birth statistics are not available in 1925.

** See "Journal of the American Statistical Association", September, 1925, p. 332.

TABLE III. — *Computation of True Rate of Natural Increase, 1926, United States Birth Registration States as of 1920.*

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Age Group	Maternity Frequency $m(x)$ (daughters only) Per 100,000 females per annum		U.S. 1926 l_x at 12.5, 17.5 etc.	COMPUTATION OF		
	1925	1926*		Zero moment R_0 $\sum m(x)\, l_x$	First moment R_1 $\sum x\, m(x)\, l_x$	Second moment R_2 $\sum x^2 m(x)\, l_x$
10–14	12	12	91,635	11	138	1,725
15–19	2,213	2,129	90,750	1,932	33,810	591,675
20–24	6,909	6,647	89,374	5,941	133,673	3,007,643
25–29	6,625	6,374	87,781	5,595	153,863	4,231,233
30–34	5,086	4,893	86,026	4,209	136,793	4,445,773
35–39	3,555	3,420	83,942	2,871	107,663	4,037,363
40–44	1,300	1,251	81,431	1,019	43,308	1,840,590
45–49	143	138	78,324	108	5,130	243,675
50–54	3	3	74,260	2	105	5,513
	25,846	24,867		21,688	614,483	18,405,190
	× 5	× 5		× 5	× 5	× 5
	129,230	124,335		108,440	3,072,415	92,025,950

$$\frac{R_1}{R_0} = \alpha = 28.333 \qquad \frac{R_2}{R_0} = 848.63 \qquad \alpha^2 = 802.75$$

$$\beta = \alpha^2 - \frac{R_2}{R_0} = -45.884 \qquad \log_e R_0 = \log_e 1.08440 = .08103$$

$$\frac{1}{2}\beta r^2 + \alpha r - \log_e R_0 = 0^{**}$$

$$r = .00287$$

* Estimated by multiplying the figures for 1925 by the ratio $\frac{20.3}{21.1}$ of the respective birthrates.

** See "Journal of the American Statistical Association", September, 1925, p. 332.

TABLE IV. — *Computation of True Rate of Natural Increase, 1927, United States Birth Registration States as of 1920.*

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Age Group	Maternity Frequency $m(x)$ (daughters only) Per 100,000 females per annum		U. S. 1927 l_x at 12.5, 17.5 etc.	COMPUTATION OF		
	1925	1927 *		Zero moment R_0 $\sum m(x) l_x$	First moment R_1 $\sum x\, m(x) l_x$	Second moment R_2 $\sum x^2 m(x) l_x$
10–14	12	11	92,777	10	125	1,563
15–19	2,213	2,119	91,926	1,948	34,090	596,575
20–24	6,909	6,614	90,621	5,994	134,865	3,034,463
25–29	6,625	6,342	89,119	5,652	155,430	4,274,325
30–34	5,086	4,869	87,438	4,257	138,353	4,496,473
35–39	3,555	3,403	85,441	2,908	109,050	4,089,375
40–44	1,300	1,245	83,015	1,034	43,945	1,867,663
45–49	143	137	79,959	110	5,225	248,188
50–54	3	3	75,964	2	105	5,513
	25,846	24,743		21,915	621,188	18,614,138
	× 5	× 5		× 5	× 5	× 5
	129,230	123,715		109,575	3,105,940	93,070,690

$$\frac{R_1}{R_0} = \alpha = 28.345 \qquad \frac{R_2}{R_0} = 849.38 \qquad \alpha^2 = 803.46$$

$$\beta = \alpha^2 - \frac{R_2}{R_0} = -45.921 \qquad \log_e R_0 = \log_e 1.09575 = .09144$$

$$\frac{1}{2}\beta r^2 + \alpha r - \log_e R_0 = 0^{**}$$

$$r = .00323.$$

* Estimated by multiplying the figures for 1925 by the ratio $\frac{20.2}{21.1}$ of the respective birthrates.

** See "Journal of the American Statistical Association", September, 1925, p. 332.

TABLE V. — *Computation of True Rate of Natural Increase, 1928, United States Birth Registration States as of 1920.*

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Age Group	Maternity Frequency $m(x)$ (daughters only) Per 100,000 females per annum		U. S. 1928 l_x at 12.5, 17.5 etc.	COMPUTATION OF		
	1925	1928*		Zero moment R_0 $\Sigma m(x) l_x$	First moment R_1 $\Sigma x m(x) l_x$	Second moment R_2 $\Sigma x^2 m(x) l_x$
10–14	12	11	92,626	10	125	1,563
15–19	2,213	2,035	91,749	1,867	32,673	571,778
20–24	6,909	6,352	90,391	5,742	129,195	2,906,888
25–29	6,625	6,091	88,861	5,413	148,858	4,093,595
30–34	5,086	4,676	87,168	4,076	132,470	4,305,275
35–39	3,555	3,269	85,078	2,781	104,288	3,910,800
40–44	1,300	1,195	82,499	986	41,905	1,780,963
45–49	143	131	79,326	104	4,940	234,650
50–54	3	3	75,178	2	105	5,513
	25,846	23,763		20,981	594,559	17,811,025
	× 5	× 5		× 5	× 5	× 5
	129,230	118,815		104,905	2,972,795	89,055,125

$\frac{R_1}{R_0} = \alpha = 28.338$ $\qquad$ $\frac{R_2}{R_0} = 848.91$ $\qquad$ $\alpha^2 = 803.04$

$\beta = \alpha^2 - \frac{R_2}{R_0} = -45.872$ $\qquad$ $\log_e R_0 = \log_e 1.04905 = .04789$

$\frac{1}{2}\beta r^2 + \alpha r - \log_e R_0 = 0$**

$r = .00170$

* Estimated by multiplying the figures for 1925 by the ratio $\frac{19.4}{21.1}$ of the respective birthrates.

** See "Journal of the American Statistical Association", September, 1925, p. 332.

1.0035. The corresponding correction in the true rate of natural increase is found (*) to be 12 per thousand, so that the corrected r, bringing the 1925 figure to the same basis as the 1920 figure (i. e. "twenty-three states"), becomes.

$$r' = 4.27 + .12 = 4.39.$$

To carry out the complete computation for 1926 and 1927 along the lines here described for 1925 would involve more labor than the case would warrant. For 1928 it would be entirely impossible owing to lack of data regarding births classified by age of mother. We can, however, by a slightly less rigorous method, obtain a figure for these years. To do this we assume that the age distribution in 1926, 1927 and 1928 was essentially the same as that in 1925; further, we shall assume that the fertility is in each case proportional to the birthrate. Thus, the birthrates among white persons in 1925, 1926, 1927 and 1928, being 21.1, 20.3, 20.2 and 19.4 respectively, we shall obtain figures for the maternity frequencies in 1926, and 1927 and 1928 by multiplying the corresponding figures for 1925 by $\frac{20.3}{21.1}$, by $\frac{20.2}{21.1}$, and by $\frac{19.4}{21.1}$ respectively. From this point on the computation proceeds exactly as before, using, of course, the 1926, 1927 and 1928 life tables respectively (See Tables III, IV, and V). It is thus found that the true rate of natural increase corresponding to current fertility and mortality for the years 1925 to 1928 was as follows:

(*) See: "Journal of the American Statistical Association", September, 1929 page 333. The formula there given, as applied to this case, takes the form

$$dr = \frac{\left(1 - \frac{23.24}{23.16}\right)}{\alpha} = \frac{.0035}{28.3}$$

$$= .00012$$

$$= .12 \text{ per thousand}$$

TABLE VI.

Year	Observed rate of natural increase	Computed « true » rate
1920	10.7	5.2
1925	9.8	4.3*
1926	8.6	2.9*
1927	9.5	3.2*
1928	7.8	1.7*

* These figures relate to 22 states. To correct for 23 states add 0.1, as explained above. The figures in the second column, for the observed rate of natural increase, relate in each case to the birth registration area of the particular year in question.

The Birthrate. — It is not only the rate of natural increase that requires correction to allow for departures of the age distribution from that form which is permanently compatible with the prevailing age-schedule of fertility and mortality. The birthrate and the deathrate require similar correction. Thus for the year 1928 with a true rate of natural increase of 1.7 per thousand, the corresponding birthrate would be 17.3 and the deathrate 15.6 per thousand, as against the observed figures of 19.4 and 11.6 respectively.

Comparison with Equilibrium Birthrate. — The corrected birthrate computed to correspond to the true rate of natural increase is the one that would ultimately result from the given fertility and mortality, after the age distribution had been allowed sufficient time to settle down to its ultimate fixed form. The corrected birthrate so computed will not, in general, be such as to hold the population stationary, *i. e.*, it will in general differ from the *equilibrium* birthrate. This latter is the reciprocal of the mean lenght of life, in the case here considered

$$\frac{1}{60.65} = 0.163 \text{ or } 16.3 \quad \text{per thousand (*).}$$

(*) Life table for white females, United States, 1926.

It is thus seen that the corrected birthrate leaves a margin of only 17.3 — 16.3 = 1.0 per thousand over the bare minimum required to keep the population from dwindling (or becoming dependent on immigration for its growth).

The observed birthrate of 19.4 is thus altogether deceptive, for if we made the comparison directly between this figure of 19.4 and the equilibrium figure 16.3 we might be led to suppose that we had a margin of 3.1 per thousand to spare. That this would be erroneous can be seen also in another way. It must be remembered that the equilibrium birthrate applies only to a population with a life table age distribution, which differs materially both from our actual and also from the age distribution corresponding to the true rate of natural increase. Let us, then compute what would be the birthrate, with the existing (1928) age distribution, but with the fertility such as would give a birthrate of 16.3 in a life table population.

According to the age-schedule of maternity frequency (daughters only) of 1928 the ratio of the total births in two successive generations is $R_0 = 1.0491$ (see table V summation of column 5). If therefore the fertility were decreased proportionally at the several ages of the childbearing period in the ratio of 1 : 1.0491 or .9532, the total number of births in successive generations would be constant, that is, the population would, with this reduced fertility, ultimately come to a standstill.

Accordingly we multiply each item in the 1928 age schedule of maternity frequency by .9532 and obtain the "equilibrium" age schedule of maternity frequency. Multiplying each item of this schedule by the corresponding item in the schedule of age distribution of (white) females in 1928, and totalling, we find (see Table VII, column 5) a birthrate of 18.4 per 1,000. This, then, is the birthrate and basic fertility which, with *present conditions of age distribution*, would just keep our population from an ultimately decreasing course. Actually in 1928 we reported a birthrate of 19.4. The remaining margin is therefore narrow, one birth per thousand of population, with the existing age distribution. This is entirely in agreement with the result obtained above, namely, that the birthrate of 17.3 per thousand corresponding to the true rate of natural increase in 1928, leaves a margin of only one per thousand over the equilibrium birthrate of 16.3.

Constancy of Age Schedule of Maternity Frequency. — The method by which these results have been reached makes no claim for

TABLE VII. — *Computation of Birthrate Giving Zero Rate of Natural Increase with age distribution (United States)* as of 1928.*

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Age Group	Age Distribution of White Female Population U. S. 1928 * Percent	Maternity Frequency m (x) (Daughters only) per 100,000 White Females per annum U. S. 1928	Maternity Frequency Reduced Proportionally to make ratio of successive generations equal to unity (3) × .9532	Product (2) × (4)
10–14	9.5100	11	10	.010
15–19	8.9048	2,035	1,940	1.728
20–24	8.3148	6,352	6,055	5.035
25–29	8.5385	6,091	5,806	4.957
30–34	8.1581	4,676	4,457	3.636
35–39	7.1635	3,269	3.116	2.232
40–44	6.5979	1,195	1,139	.752
45–49	5.5655	131	125	.070
50–54	4.8166	3	3	.001
				18.421

* Age distribution in 1928 (22 States of Birth Registration Area as of 1920) assumed to be the same as in 1925. For 1925 population in the 22 States classified by age, see Table II, column 6.

extreme accuracy. The age schedule of maternity frequency is not wholly fixed in outline; that is, the reduction which has been going on has undoubtedly not affected all ages of the childbearing period strictly proportionally, and strict proportionality cannot be expected in future reductions. But the error thus introduced is not large. We have not all the statistical data available which should enable us to make a rigorous comparison of the age schedule of maternity frequency in successive years of the recent past. We can, however gain at least some insight into the degree of constancy or variability of the proportional age schedule from year to year, by comparing the percentage of all births in successive years that arise in the several age groups of the reproduction period — *irrespective*

of the number of women exposed. The following Table VIII shows the pertinent figures.

TABLE VIII. — *Distribution of Births* Among Mothers of Different Ages,* 1920-1926.

U. S. Birth Registration Area as of 1920, white Population.

Year	Age of Mother									
	10–54	10–14	15–19	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44	45–49	50–54
1920	100.00	.04	8.14	27.84	28.09	19.30	12.10	4.09	.40	—
1921	100.00	.04	8.78	27.46	28.01	19.25	12.05	4.01	.40	—
1922	100.00	.04	8.70	27.28	27.84	19.63	12.08	4.04	.38	.01
1923	100.00	.05	8.79	27.27	27.67	19.76	12.06	4.02	.38	—
1924	100.00	.05	9.22	27.58	26.94	19.76	12.02	4.05	.38	—
1925	100.00	.05	9.39	27.35	26.91	19.72	12.11	4.08	.38	.01
1926	100.00	.05	9.61	27.71	26.60	19.65	12.01	4.00	.37	—

* Daughters only. Essentially the same figures would hold for children of both sexes.

It will be seen that the percentages do not vary very greatly from year to year. There have, nevertheless, been certain systematic changes, as follows : In the youngest age group of mothers (10-14) the figures show an increase in the period 1920-1926 ; but the figures themselves are so small that no significance can be attached to this.

In the second age group, 15-19, there is a distinct increase from 8.14 per cent to 9.61 per cent. With one exception (the year 1921) the series form a consistently increasing set of figures.

The third age group, 20-24, forms a stationary pivot about which the general array of figures in the table have tilted, for when we come to the next group, 25-29, we find that here there has been a consistent decrease. The remaining age groups are essentially unchanged.

In the absence of any exact knowledge of the age distribution of the population, it is impossible to form any definite conclusions regarding any changes in age-specific fertility that might be implied by the figures in Table VIII. But broadly it can be stated that there cannot have been any very great change in the form of the curve of fertility of women of different ages.

One factor of safety of unknown magnitude remains. There is still some degree of laxity in the registration of births, and the figures of the true rate of natural increase may on that account be somewhat larger than recorded above. Perhaps the facts which have here been presented may serve to bring home to us once more the great desirability of more pains-taking collection of vital statistics and enforcement of registration rules. We have, in past years been making special efforts to extend our birth registration area, to be as nearly as possible coextensive with the territory of the United States. We have been congratulating ourselves on the success of these efforts. We have no occasion to be greatly self-satisfied. It now remains for us to renew our efforts in order to make truly complete the registration within that area which we have succeeded in gathering into the communion of statistically civilized nations.

Conclusion. — It seems hardly necessary to point out the significance of studies of the character of that here presented, in relation to national and international population policy and the programmes of agricultural and other activities that form one of the fundamental elements in such a policy.

The effective fertility of our population is separated by a closer margin from the minimum consistent with undiminished numbers than appears on the surface, and than most of us have probably supposed. The last birthrate figure published by the government shows a decline of nearly one unit per thousand, as compared with the immediately preceding year. Should the next year by any chance bring a still further decline by .8 per thousand, we should actually have reached a birthrate of 18.6, practically the same figure that has been shown above to correspond to just that fertility which, with the existing age distribution, will only just suffice to keep the population at a standstill. Any further decline in fertility would, in the absence of immigration, mean *ultimately* a diminishing population, even though for a time this might not become apparent owing to the residual effects of past higher fertility.

Facts such as these must be borne in mind in discussing in a scientific way and in attacking in a practical way the national problems of supply of food and other necessities that arise in the regular course of events.

PERICLIS D. REDIADIS

The Greek national Income and Wealth in 1929.

I. — Preliminary.

I purpose to give here a resumé of the estimates of the Greek national income and wealth so far for several epochs and by several persons, to examine the degree of confidence which might be allotted to each of them, to carry up to 1929 approximately all the results of calculations for other years, and finally to calculate the national income directly for 1929 and compare it with that approximately deduced from the combination of previous calculations above mentioned.

The question of the Greek national wealth is also treated.

II. — Record of the valuations made up-to-date.

The following is a list of the most important estimates of the Greek national income made up-to-date.

A. The first estimate of the Greek national income seems to be referred to by Mulhall (*Dictionary of Statistics*, 1884) bringing it up to £ 23 millions. The bases of said estimate and details are not given and the result given appears to be derived from information of the Greek Statistic Service, which, however, was at that time in a state of quite infantile development.

B. The first Greek attempt, however, made at that estimate is due to the late S. Skiadas, who first organised the Greek Statistical Service (Σ. Σκιαδᾶ, Ἡ Ἑλλάς ἐν Εὐρώπῃ, Athens, 1891).

He has applied the method of consumption of commodities according to de Foville (*La France économique*) adopting for the

value of the daily individual consumption the number indicated by DE FOVILLE for France, i. e. 0,75 Frcs, which corresponds to an individual annual expenditure of 247 Frcs. The population of Greece being 2187208 in 1889, he found for the total of consumption the sum 599.294.992 Gold Drachmes, one Drachma being at the time equal to one Gold Franc. To that sum he added the several forms of savings, estimated by him as constituting about 1/10 of the per-capita expenditure, i. e. 28.0 Drs. and adding consequently a sum of $2187208 \times 28{,}0 = 61241824$ he arrived at 660,536,817 gold Drachmas, as representing approximately the Greek National Income for 1890. At the same time he verified that figure on the basis of the State receipts, which was a method recommended by LEROI-BEAULIEU (*La science des Finances*). The total of the Treasury receipts being 96,971,100 Drs. in 1890, he had deducted the income from the State's Property etc., and found 83,817,483 (i. e. 38 Drs. per person) as the net revenue of taxation. By adopting an average percentage of 12.50 of the income as representing the revenue from taxation, he arrives at the sum of 670,540,664 Drs. as the value of the national income. Although he does not prove the existence of an analogy between France and Greece for adopting the same daily consumption, and he gives no details of the Bank and Societies' Deposits, nor any justification of the average coefficient 12.50 %, this calculation was, nevertheless, in spite of the well known difficulties, a reliable one, especially for the time, because Skiadas stood on a really scientific level at that epoch.

C. MULHALL gives further another figure for 1908 (*Dict. of Stat.* 1909, p. 747), £ 28 Million, distributed as follows :

Agriculture	8 million £
Manufacture . . .	5
Trade	3
Transport	3
Mines	2
Domestics	1
House rent	2
Professions	5

Total £ 28 million = 700 Million Gd. Drachmas.

Again sources and details are not given. However, from his first estimate (1883) to this last (1908) we may note an annual increase of about 0.011.

D. The Minister of Finance introducing the Income-tax Law in 1919 adopted the amount of 1000 million as representing the national income ((Περίληψις τῆς κειμένης ἀμέσου φορολογίας, Athens, 1919, p. 84) without any further explanation as to the data used in his estimate. The Director of Direct taxation in the Finance Ministry, Mr. D. TANDALIDES, who actually was the soul of the Income tax Law innovation, has declared to me that the Minister's statement was probably erroneous, because his own estimates brought this Income up to 2 Billion Drachmas for 1918-19. I rely rather on this last estimate of TANDALIDES, afterwards Minister of Finance, although he also did not give any details.

E. In order to explain a new method of mine for the calculation of the revenue of the income-tax for countries deprived of the necessary statistical data, I was led to calculate the Greek national income as a consequence of the calculation of that revenue. The method was based on a comparative estimate of the Coefficients α and A of the well known PARETO's formula (PARETO, *Cours d'Economie politique*, 1897, Vol. II, p. 299) and the result of my estimate of that revenue coincided with the sum afterwards effectively realised. But as National income my calculation gave for 1919 the sum of 2100 million Gd. Drachmas, or 31.500 million Drachmas (REDIADIS, *Nuovo metodo di determinazione del reddito nazionale*, in " Giornale degli Economisti ", 1921, p. 35).

F. Dr. A. ANGELOPOULO, although with reservation as to the accuracy of his own estimate, gives the sum of 16 billion Dr. for 1925 ('Αρχεῖον Οἰκον. καί Κοινων. 'Επιστημῶν, Athens, 1927, p. 79) as follows :

	Millions
1) Agriculture, according to the revenue of the Agricultural Income-tax, the tithe, for 1926 Dr. 8000, and after reduction of 75 %, net income	2,000
2) On the basis of the receipts from Direct taxation (1924), equal to 1/10 of the corresponding income.	10,000
3) Income from Export trade	2,000
4) Income from undetermined sources	2,000
Total	16,000

This rough estimate based principally on financial data seems for that reason to be worth of revision as follows :

	Millions
1. The value of the income from agriculture is given by the official Statistic Service for 1927, as about 10,200 million Drs. (Statistique Agricole de la Grèce, 1927) and after deduction of 25 % for seed etc. we have	7,750
2. The receipts from direct taxation for 1927 might be estimated at 1800 million (Εἰσηγ. Ἔκθ. Προϋπ. 1929-30), which, after deduction of 20 % for escaping incomes,gives 1440 millions. To this sum, by the coefficient of 10 % adopted by Mr. ANGELOPOULO, correspond	14,400
3. The value of the exported products for 1927 was 5429.7 mill. (Bull. mens. de Statist. Nov. 1929) After a deduction of 15 % for raw material, we have	4,655
4. The undetermined sources of income give an amount of 249 million gold Francs for 1925 (KAPSALIS, *La balance des comptes de la Grèce*, 1927), or	3,735
	30,540

The figure of 30,500 million Dr. seems to offer the most probable result of Angelopoulos method of estimation for 1927.

G. Mr. G. KAFANDARIS, Minister of Finance, introducing the Budget for 1927-28 adopted the figure of 2000 mill. Gold Dr., viz. 30.000 mill. Dr. for 1927 (Εἰσηγ. Ἔκθεσις εἰς τὸν Προϋπολογ. τοῦ 1927-28 Τεῦχ. I, σ. 23). He took as a basis a calculation made by Dr. G. SACALIS, M. P. and privately communicated to him, and declared in the Chamber that this calculation was a " detailed " one, and " the work not perfectly ascertained, but serious and trustworthy ". The details. however, have never been published, but the judiciousness of the deviser offers a serious guarantee.

H. Professor X. ZOLOTAS, in the University of Salonica, has recently assessed the national income for 1927 up to the sum of 47.000 mill. Dr. (Ζολώτα, Νομισματική σταθεροποίησις, Athens, 1929, p. 95) as follows :

I. Production.

	Millions
a) Agriculture, less 2 % for seed, etc.	13,500
b) Industry, less 50 % for raw material	5,000
c) Cattle	6,500
d) Forestry	400
e) Shooting and fishing	1,000
f) Mining and salt production	350
	26,750
Less 3 % for waste of capital	802
Total (prod.). . .	25,948
II. Import less export.	
Deficit of the commercial balance	6,565
III. Commerce, communications, transport.	
a) Commercial profits and wages	5,500
b) Communication and transport	2,300
IV. Liberal professions	1,600
V. State and Commercial employment	2,000
VI. Services of real estate	3,000
Total income . . .	46,913

This estimate is evidently much exaggerated. All numbers given above for production etc. are much higher than those given by the official statistics and sources, and cannot stand any minutious investigation, as will be seen below, where the real figures for the corresponding sums will be sought. For the appreciation, however, of the degree of accuracy which is to be allotted to this estimate, we may state the fact that the total of the commercial deficit has been considered by the author as a part of the national income. This conception constitutes a lamentable confusion between commercial balance and balance of the accounts and that of payments. Of course there are some items of income which might escape calculation and not be actually included in it, and evidently an investigation of the details of the balance of accounts might show some sources of in-

come undertemined and consequently not included in the estimate of income. That is what VANDELLOS seems to have done in estimating the income of Spain (VANDELLO's, *La richesse et le revenue de la péninsule Ibérique* in " Metron ", vol. 4, N. 4, 1925, p. 169 et 180). But adopting the commercial deficit as being a part of the national income, even if instead of it the total of the deficit of account or of payments is considered, is a fault met for the first time in economical matter, as well as that of adopting a percentage of 2 % for seed, etc., in agricultural income, or neglecting the income from the mercantile marine, from emigrants, etc. Further, the author appears to have no knowledge of the calculations of the income previously made (REDIADIS, in "Οἰκονομλ. 'Αθεηῶν, March 1930).

I. Recently Dr. G. SACALIS, M. P. was so kind as to communicate to me the result of his last private valuation of the national income for 1929, without details and any further explanation.

Agriculture	11.75 bill.
Cattle	5
Forestry	0.6
Shooting and fishing	0.9
Mines	0.4
Salt	0.19
Industry	5.0
Mercantile Marine	1.0
Transport	1.5
Services from real capital	2,625
Commercial profits and wages	5.0
Remittances and other undetermined sources	1.45
Public and private allowances	3.0
Total	41.0 bill.

This valuation seems to exaggerate the income, as will be seen below, probably under the influence of the above mentioned estimate of ZOLOTAS. In every case this figure of 41 billions appears to be in contradiction to what SACALIS suggested for 1927, as above stated,

unless we adopt an annual increase of 5 bill., or about 17 %, which is evidently inacceptable, as will be seen below.

J. The Minister of Finance introducing the new Budget 1930-31 in the Parliament on Nov. 20th 1929, said " if we suppose the national income to be 45 bill. Dr " (Εἰσ. Ἐκθ. Προϋπολ. τοῦ 1930-31 σ. 29). He also gave no details and seems equally to be influenced by ZOLOTAS valuation. This amount, however, has been considered from all competent sources as exaggerated and illusionary (« Πλοῦτος » Athens, 15 Δεκ. 1929, σ. 5, « Οἰκ. Ταχυδρ. » Athens 5 Ιαν. 1930).

III. — VALUATION OF THE GREEK NATIONAL INCOME FOR 1929.

I intend now to estimate the Greek national income as accurately as the statistical data allow. The voids in the statistical data have been filled in, as much as possible, from trustworthy information and analogy to other countries, chosen amongst those which offer approximately analogous economical situation and the most reliable estimates, like Spain and Italy. I believe that such detailed examination and verifications are missing from all the above mentioned estimates.

My valuation is based on the estimate of the value of the commodities produced and services rendered by the several forms of Greek wealth, as well as on that of the value of consumption of commodities by the Greek people. Both estimates give almost the same amount. The revenue of the income tax cannot be used satisfactorily for that purpose, owing to the special from of the actual Greek income-tax Law. In the same way an estimate of the national income as a percentage of the national wealth cannot be made, because of the lack of any previous valuation of that wealth.

I got through the first method the following results :

I. Physical production.

1. *Agriculture.* — The agricultural statistic for 1929 being published only after some months, I am obliged to satisfy myself with the results of 1928, although prevision for 1929 is not very encouraging (" Bull. mens. de Stat. ", Octobre 1929).

The value of the agricultural income for 1928 was 11.268 million Dr. (" Statistique Agricole de la Grèce ", Athens, 1929). Professor GINI has fixed the percentage, which is to be deducted for expenditure on seed, up-keep, depreciation etc. at 25 % for prewar times, (GINI, *L'ammontare e la composizione della ricchezza delle nazioni*, 1924)

but MAROI proposes for post-war period 24 % (MAROI, *Valore e reddito della terra*, 1929) a percentage which was also adopted by GINI for that period (GINI, *A comparison of the national wealth and income*, ecc. Roma, 1925). We arrive consequently at the figure of 8564 million Dr., which includes also the work done in agriculture by cattle, owing to the method of estimation of the income employed by the Statistical Service.

The sum of 8564 million Dr. might also be verified through the taxation on the rough agriculture product, which gave for 1928-29 the sum of 108 million Dr. (except grapes, currants, oil, tobacco) to a coefficient 3 %. To that receipt corresponds an income of 3600 million Dr. which is to be increased for the escaping income, by about 25 %. We arrive therefore at the sum of 4500 mill. Drachmes. To this sum is to be added the income from other products exempted from taxation, i. e. grapes 1007,5, currant 1376,7, oil, olives 2413,2, tobacco 2143.4, together 6941. If we add the income of 4500, we arrive about at the same sum of 11,440 mill. Dr., as that above mentioned without any deduction for seed, etc. We may adopt, therefore, for 1929 the figure of 9000 million Dr. allowing also for some small omissions.

2. *Fruit trees.* — This production is estimated for 1928 up to 309 million Dr. (" Statist. Agricole ", 1929) If we deduct 3 % for upkeep, depreciation, etc. we arrive at the sum of 320 mill. Dr. for 1929.

3. *Forestry.* — The value of forestry production for 1928 is also given officially (" Bull. Mens. Stat ", Avril 1929) separately, viz : from public forests 128,3 and from private 220,5 million Dr. Total 348,8. The Ministry of Agriculture for 1929 gives unofficially the number of 599 mill. (« Οἰκον. Ταχυδρ. » " 12 'Ιαν. 1930) After deduction of 5 % for capital waste, etc., we arrive at the sum of 570.0 million.

4. *Pasturage.* — The revenue of the relative taxation is about 13 mill. for 1928-29 which corresponds to an income of about 80 mill. We adopt the amount of 100 mill. Dr.

5. *Cattle.* — Although Greece is not particularly developed in cattle, very often figures evidently very exaggerated have been attributed to the income from it, and some unofficial sources bring such income up to about 7-8 billion Drch. (« 'Αγροτική Ζωή » Athens 1929 No. 30, p. 2) in spite of the fact that a sum of about 200 million represents the deficit in the commercial balance due the to import of cattle (Bull. Mens. Stat., Avr. 1929). I have therefore been obliged to proceed to a detailed calculation of that income, based on trustworthy official information, the General Statistical Service not having calcul-

ated this income. The total of cattle, etc., is officially given for 1928 (" Stat. Agricole de la Grèce ", Athènes 1929) and the production of each animal is also from the Ministry of Agriculture unofficially given to me. I have, therefore, constructed the following table :

	Number	Value of Milk Mill.	Value of Meat Mill.	Wool val. Mill.	Working value	Total
	—	—	—	—	—	—
Sheep	6,920,361	872	480	70	—	1422
Goats	4,919,118	796	184	37	—	1017
Cows	303,431	1274	150(calf)	—	—	1424
Bullocks . . .	500,000	—	60	—	—	60
Porks	413,524	—	200	—	—	200
Other animal .	1,024,432	—	—	—	1426	1426
Poultry . . .	9,693,241	—	150	—	—	150
					Total . . .	5699 mill.

Of course in this value is included also 1426 million corresponding approximately to the mechanical work done by these animals. But part of it is included in Agricultural income, above estimated, and part in the corresponding incomes, from commerce, communications, etc. If we deduct this number we have a sum of 4273 mill. which might be brought up to 4500, as to include also the value of rabbit, honey, etc. The estimates for 1929 give an inferior figure at about 50 % (« Οἰκον. Ταχυδρόμος »,", 12' Jan. 1930) for the production owing to the bad winter. This should reduce the income to about 3200 mill. Dr. for 1929. We arrive almost at the same result when considering the income of the cattle as a percentage of its value. If we adopt as the price of the cattle that officially declared on its import to Greece ('Εγκυκλ. Λεξ. Vol. 5, p. 439), we have, in accordance with the number of the cattle above given, as its price approximately

	Million Dr.
	—
Sheep	3164.2
Beef, etc.	2512.4
Horses, etc.	2603.2
Pork	526.1
Poultry	238,2
Total . . .	9044,1 million Dr.

The percentage is considered by Prof. VANDELLOS (*La richesse et le revenu de la Péninsule Ibérique* in " Metron ", 1925, 4ème année, p. 180) equal to 0.50, and professor DEGLI ESPINOSA (*La ricchezza privata degli italiani*, in " Metron " 1929, III, 1. 2) adopts about the same value $\frac{1}{209} = 0{,}48$. We have therefore for 1928 on this basis 4522-4325 million. Dr. ANAGNOSTOPOULOS and Dr. EVELPIDIS adopt the number of 15000 mill. for both agriculture and cattle, from which they attribute to agriculture a gross income of 10500 arriving in that way at the figure 4500 mill. for cattle ('Εγκυκλ. Λεξικ. Vol. 5, p. 438). We might consequently admit the mean value of 4000. for 1929 allowing also for the depreciation of this year.

6. *Shooting and fishing.* — The total production from fishing is estimated by the Director of Fisheries in the Ministry of National Economy to about 15-19 million Kil. (Εγκυκλ. Λεξικ. Vol. 5 p. 441) The average price of fish being about 10 Dr. per kilo, we have an income of 150-190 mill. Drach. although it has been assessed at a much higher value. The income of shooting is very limited. The receipts from the shooting licenses being about 100 mill. per annum, a sum of no more than 50 mill. would be reached. Professor GINI considers for Italy (GINI, *A comparison of the wealth and national income*, etc. Roma 1925, p. q.) the income from shooting and fishing as equal to the 7,2 % on the income of agriculture, forestry and pasturage, which would give for Greece an amount of about 100 mill. Dr. for both, shooting and fishing. An amount of about 200 mill. seems to represent the income from shooting and fishing.

7. *Mining and salt production.* — This income is given officially for 1928 (" Statistique de l'Industrie minière de la Grèce ", Athènes, 1929) as being 287.0 mill. Dr. For 1929 it would be about 300 mill. The value of salt production for 1928 is 122 mill. (" Stat. de l'Ind. minière ", etc.) We adopt the figure of 400 mill. to include also for waste of capital (5 %).

Consequently the total income from physical production will be 14600 million Dr.

II. — INDUSTRY.

The income from Industry has been estimated by the Ministry of National Economy for 1928 ('Η 'Ελλ. Βιομηχανία τῷ 1928 edition of the Chamber of Commerce & Industry of Athens, 1929, p. 20) as follows :

		Mill.
Spec.	1. Metallurgy (includ. mining)	68
	2. Engines, etc	262
	3. Building materials	382
	4. Texture	1760
	5. Food Industry	5507.9
	6. Chemical industry	972.4
	7. Leather »	975.0
	8. Paper »	141.5
	9. Clothing »	103.3
	10. Wood »	335.3
	11. Cigarettes »	206.7
	12. Electrical »	385
		11080.0

The value of raw material, which is above deducted only for milling products, may be estimated through a reasonable percentage as follows:

Spec.	1. The total is included in *Mining*	68
	2, 7, 9, 10 percentage 40 %	670
	3, 4, 6, 8 » 25 %	808
	11. » 10 %	21
	12. » 60 %	231
	5. The value of wine and oil included in Agriculture is estimated by the Ministry of Nat. Economy (l. c.), as being 4145 mil. and on the rest of raw material used a percentage of 40 % gives 549 mill. Total	4689
	Total of reduction for raw material . . .	6487mill.

which deducted from 11080 mill. gives 4593 mill. for 1928. This amount seems to be reduced in 1929 by about 15 % (« Οἰκ.Ταχυδρ. » 1930, 12 Jan., No. 196) Consequently the income from industry for 1929 is about 4000 million Drachmas.

III. — Commerce.

For the commercial income, including wages, there are no statistical data. The only way of arriving at an approximate value is by adopting a mean percentage of commercial profits of about 20 % on the value of the entire volume of trade, i. e. export and import trade together. This volume is about 20,260 mill. for 1929 (" Bull. mens. du commerce spécial de la Grèce ", Dec. 1929). This gives an approximate income of 4050 mill. Dr. including also for wages, transport (fob. or cif.), etc. This number might be verified also by comparison to other countries. For Italy Professor Mortara (*Quel che è il reddito degli italiani*, in " Mondo ", 1922) estimates the commercial income as being the 1/10 of the total income for Italy, and Gini (*A comparison*, etc. p. 5) adopts the precentage of 0.11. Vandellos (l. c., p. 180) considers the commercial income of Spain equal to 1/11 of the incomes for agriculture, pasturage, mining and industry. For a total Greek national income of about 35 bill. Dr., as I think is the case, the commercial income would be 3500-3840 mill., according to Mortara and Gini, and only 2450 according to Vandellos. I should adopt the sum of 3000 mill. Dr. allowing also for omissions.

IV. — Exploitation of communications.

1. *Land communications.* This income consists of (*a*) Transport expenditure for the total of import trade (which is estimated *cif*) from ship to the railways' stations and stores. This includes landing and part of the income from lorries and vehicles and is roughly estimated at about 80 Drs. per Ton of import. On the volume of 2700 million tons (" Bull. Mens. du Commerce spécial de la Grèce ", Dec. 1929) we have the sum of about 216 mill. Dr. from which 5 % is to be deducted for capital waste. We have, therefore, an income of 210 mill. (*b*) Income from Railway. The total receipts from all Greek railways is estimated for 1929 at about 700 mill. to which, according to the statistics of Railway Companies, and my information, corresponds an income of about 400 mill. After reduction of 0,33 corresponding to the export trade, in the income of which the respective sum is included, we arrive at 265,3 mill. (*c*) Income from lorries, vehicles, horses, etc. when they are used instead of railways, as well as for other purposes. This income is to be estimated on the basis of 25,000 motor-

cars to about 200 mill. Dr. after reduction of part from (*a*) This makes a total for land communication of about 700 mill. Dr.

2. *Sea communications.* This income is drawn from :

(*a*) Exploitation of National Sea communications. The income from Steamship Companies in accordance with a rough estimate is about 200 millions ; adding 200 mill. for sailing vessels and small craft we arrive at 400 mill. Drs.

(*b*) Exploitation of International Sea Transport (Mercantile Marine). This income is generally estimated very high or very low. Information from trustworthy shipowners gives the figure of £ 1 approximately per ton for the profit from ships of more than 15 years old, as is the case with the Greek mercantile marine, 1/10 of a Pound for wages and $^1/_3$ of a Pound for repairs. For the tonnage of the Greek mercantile marine, 1,260,000 tons, we have an income of £ 1,430,000 = 536 mill. Dr. If we should presume that part of it enters into Greece we may admit a superior value of 300 mill. Dr. highly estimated, as representing that income. I have indeed been advised that only 25% of that income enters into Greece, the rest being on deposit abroad.

The total income from sea communications would consequently be 700 mill. Dr., and the income from communication in general would be 1400 mill. Dr. WAGEMANN (*Konjunkturlehre*, 1928, S. 31) adopts for Germany a percentage of 0.082 of the total income. Greek communications, being in a far inferior situation relatively to those of Germany, a maximum coefficient of about 0.040 would be a reasonable one. For a total income of 35000 mill. Dr. we would have about 1400 mill. Dr.

We may adopt the figure of 1500 million Dr.

V. — SERVICES OF REAL CAPITAL.

This income includes

1. Interest on public loans, i. e. (*a*) 223,0 mill. Dr. from dividents from Greek Government Loans in gold, paid in Greece (" Compte rendu de la Com. Financ. inter. ", Athènes 1929, p. 48) ; (*b*) about 700 mill. Dr. from Greek Government Loans in Bank notes : (*c*) about 150 mill. Dr. paid from private loans, according to the receipts of the special tax. The total would be about 1100 mill. Dr.

2. Income from houses. The revenue of the taxation on income from houses would be for 1929 about 180 mill. Dr. which on a coefficient of 18,2 % gives an income of about 1000 mill. Dr. which might be increased to 1300 mill. Dr. owing to the house-income moratorium,

producing a partial diminution of income, and to the fact that a number of houses built between 1923-26 have been exempted from taxation, and therefore not included above. On the other hand, however, the Water Tax for Athens and Piraeus, including every house independently of the time of building, gives some 80 mill. Dr. yearly, on a coefficient of 12 %, corresponding to an income of 667 mill. Dr., part of which is included above, that for old houses. If we suppose that this part is equal to the income from small houses under 5000 Dr. exempted from taxation, we arrive to a total of about 2100 mill. Dr. as income from houses. The total of real capital services would be therefore about 3200 mill. Dr.

VI. — Personal services and pensions.

1. Public and communal employment. The income from public employment is stated in the Budget for 1929-30 as equal to 2405 mill. Dr. (Εἰσ. Ἐκθ. Προϋπολογ. 1930-31, p. 26). This sum would be increased to about 2600 so as to include also communal services.

2. Liberal professions. The total number of persons occupied in liberal professions according to the statistics (1928) is not superior to 16.000. With a mean approximate monthly allowance of 5000 Dr. we arrive at a sum of about 950 mill. Dr.

3. For pensions the amount of 576 mill. Dr. is included in the Budget for 1929-30.

The total would be 4100 mill. Dr., the income from private employment being included in the above special incomes.

VII. — Income from abroad.

This income includes remittances from emigrants, trade profits realised abroad, interests from foreign capital, expenditure of travellers and transit trade. From these incomes, nevertheless, only that from emigrants and interests from foreign capital is not included in the above special incomes.

The income from remittances has been calculated by the Bank of Greece as equal to 6,400,000 of English Pounds (" Report of the Governor of the Bank of Greece for 1928 ", Athens, 1929, p. 12). Mr. Michalopoulos, Director of Statistics, estimates it to 4,510,000 Pounds and 68,000 dollars, total 4,600,000 Pounds (Ἐγκ. Λεξ. Vol. 5, p. 431) I would adopt the figure of £6.440,000 viz 2415 mill. Dr.

The interests from foreign capital is estimated by Mr. KAPSALIS (*La balance de comptes de la Grèce*, 1927) for 1925, as equal to about 750 mill. Dr. We might largely adopt 850 mill. Dr. for 1929.

The total of this income should be 3300 mill. Dr.

Summarising, we have, through the method of estimation of commodities produced, and services rendered,

	Mill. Dr.
I. Physical production	14,600
II. Industry	4,000
III. Commerce.	4,000
IV. Communications and transport	1,500
V. Real capital	3,200
VI. Personal services.	4,100
VII. Income from abroad	3,300
Total . . .	34,700

as representing the national income of Greece for 1929, or 35 000 mill. Drachmas.

The national income of Greece might be valued also through the estimate of the consumption of commodities by the Greek people. We should have in that case :

A. Value of agricultural food stuff produced in Greece.

		Mill. Dr.
Total value of agricultural production ("Statistique agric. de la Grèce, 1929")		11,268.2
Deducted the value of products		
a) for industrial use of cattle	3,171.2	
b) for seed etc	1,781.3	
		4,952.5
		6,315.7

Value of food stuff production	6,315.7
B. Fruit-trees production except those for industrial use, after eduction of 5 % for waste of capital	262.5
C. Import of alimentary articles	4,611
D. Industrial production of such articles in Greece (Athens, Chamber of Commerce & Industry, l. c.)	804.2
E. Cattle (only for food)	3,166
Total . . .	15,159.4
Deduction for export of agricultural and industrial food production	1,330.8
Price of food consumption . . .	13,828.6

The above price being market price, a percentage of about 20 % according to GINI (l. c.) on that price is to be added for the preparation for alimentation (bread-making, culinary preparation and cooking). If we consider however the conditions and customs of Greek people, especially agricultural, that percentage of 20 % is to be diminished at least by 2 % arriving to 18 %. Adopting however GINI's number, we have for total amount spent for alimentation the figure 13,828.6 plus 2,765.7 = 16.594.3 million Dr.

We are now to ascertain what part of the total income is that spent for alimentation. GINI admits for Italy an average of about 60 %. Investigations made recently in Germany give the percentage of 47,9 (annual income 2500 M) to 45.3 (Annual income 4300 M) with a large percentage for other expenditure and only 1,5 % for money-saving purposes (A. ANGELOPOULO, Συνθῆκαι ζωῆς κλπ., in Οἰκ. Ταχυδρ. 1929, No. 190) Investigations made in Greede by the National Bank of Greece (PRATSIKAS, Ἔρευναι ἐπὶ τῆς ἀκριβείας τῆς ζωῆς, κλπ., Athens, 1927) through the same demographic method introduced by LE PLAY, gave 50,8 % for 1914 57,0 % for 1923-24 and 55,0 % for 1927. Although, I think a more accurate estimate ought to be based on a combination of the family's budgets extended to all classes, with the distribution of the income of the people and the logarithmic law of ENGEL, I suppose that a reasonable value for that percentage is represented by 53 % which gives respectively 30,171 mill. Dr.

To that amount should be added a percentage for several forms of saving, which lies, again according to GINI, for Italy between 13%

and 14 % (GINI, l. c.). If we adopt for Greece 14 %, the Greek people being rather inclined to economy, we arrive at the figure of 34,400 mill. Dr. as representing the Greek national income estimated through the consumption of commodities by the Greek people.

We might adopt the figure of 35,000 mill. Drachmas so as to allow for any omission, though such omission has been avoided as much as possible.

IV. — COMBINATION OF THE MOST RELIABLE FIGURES.

A verification of the several figures given so far for the national income being impossible, owing to the lack of the details of the estimates, if we desire to find an average number from all these figures, except those which have been considered above as being not reliable, we are to satisfy ourselves with the calculation of the increase of each income from the date of its estimate up to 1929 and afterwards to compensate all these estimates reduced to 1929, from the error which the lapse of time might introduce.

I must at first mention the great difficulties which the estimate of that annual increase offers. Indeed

a) Greece between 1912-13 has been almost doubled, through the annexation of the late Turkish provinces, i. e. part of Macedonia, Thrace, and Epirus, the Aegian islands with Crete, Mitylene, Chios, etc. It is owing to the complete lack of any statistical data, that I feel obliged, although with much hesitation, to admit that the Greek national income has been also doubled between 1912 and 1913 and upwards.

b) Greece has also been effectively in a state of war and political complications from 1914 till 1922, so that the idea that during that period no increase has taken place, seems to be acceptable.

c) On 1922-24 about 1,500,000 refugees from Turkey have been established in Greece, deprived of any means of earning their livings, and being unable to contribute in any way to an increase of the national income, and therefore living with the assistance of the Greek Government. It was only from 1926 and upwards that this relatively enormous new population began to become productive.

d) There is almost no calculation from those above mentioned, which has been made for two different and largely separated epochs, by the same author, and through the same method, so that the annual increase cannot be calculated in that way.

In order to remedy as much as possible these inconveniences, I thought advisable

a) to consider as constant the national income from 1914 till 1922, incomes for intermediate years being also considered as equal to that of 1922.

b) to adopt as annual increase of the Greek national income the minimum increase which has been observed for other nations in approximately similar conditions with Greece, for 1922-25, a mean value for the years before 1914, and a value rather increased for the period 1926-29.

That we are justified in adopting these suppositions is to be seen from the observation of the development of the export trade of Greece, if this could be chosen as a guide for the development of the national income. The mean value of the export trade from 1910-12 was 143,9 mill. gold Drachmes. From 1913-21 that average remained constant and represented quite the double i. e. 286,9 mill. Dr. (gold). From 1922-25 this average was 305,6 mill. gold Dr. which corresponds to an annual increase of about 0,021 and from 1026 up to 1929 we have an average of about 374,1 mill. Dr. and an annual increase of about 0,074. Of course this supposition is based on the conception that a double population and surface ought to have a double trade, consumption, liberal professions, agriculture, etc.

As it concerns the estimate of the annual increase we have the following international increase, according to GINI (*A comparison*, etc., 1925, p. 36) in billions of Dollars.

	1914	1925	%	annually
Italy	3.76	4.06	0.011	0.01
France	7.24	7.74	0.07	0.01
Belgium	1.40	1.75	0.25	0.02
U. Kingdom	10.95	19.0	0.20	0.02
U. S. A.	33.0	70.0	1.12	0.10

FINDLAY SHIRRAS (*Taxable capacity* etc. in " Journ. of R. Stat. Soc. " 1925) adopted for France an annual increase of about 0.038 which is evidently inadmissible.

From the stimates of MULHALL though very old, an annual increase of about 0.013 is to be deducted.

Consequently we may adopt an annual increase before 1924 of 0,02, from 1913 to 1922, no increase but a double income, from 1922

to 1926 an annual increase of 0.01, and from 1926 to 1929 a such increase of 0.03.

The reductions might be summarised in the following table.

No	Author	Date	Income in Gold Drach.	Number of years (incr. 0,02)	Income 1914 G. Dr.	Income 1914-22 (double in Dr.)	Number of year (incr. 0,01)	Income 1926-27 In Dr.	Number of years (incr. 0,03)	Income 1929 in Dr.	Remarks
1.	MULHALL .	1883	575	31	931,5	27935	4	29052	3	31667	
2.	SKIADAS . .	1891	660,5	23	964.3	28926	4	29983	3	32781	
3.	MULHALL .	1908	700	6	784	23520	4	24460	3	26879	
4.	FIN. MIN. .	1918	2000	—	—	—	4	31200	3	34008	
5.	REDIADIS .	1919	2100	—	—	—	4	32760	3	35708	
6.	ANGELOP. .	1927	—	—	—	—	—	50500	3	33245	
7.	FIN. MIN. .	1927	—	—	—	—	—	30000	2	31800	
8.	ZOLOTAS . .	1927	—	—	—	—	—	46913	2	49424	not reliable
9.	SAKALIS . .	1929	—	—	—	—	—	—	—	41000	not reliable
10.	FIN. MIN. .	1929	—	—	—	—	—	—	—	45000	not reliable
11.	REDIADIS .	1929	—	—	—	—	—	—	—	35000	

I now think it advisable, instead of taking the mean value for the old estimates, to try to compensate them beforehand from the error which might be introduced from the consideration of a constant annual increase in the lapse of so long a time.

We might adopt that the degree of accuracy of the reduction is in contra-ratio to the number of years passed from the time of the calculation till 1929. If we admit this, we may give a "weight" to each calculation according to the years passed, and treat the average according to the method of least squares. We have therefore

Number	Years passed	$p = \frac{Ep^2}{Em^2}$		Income	
1	7	$39^2 \times 31^2 \times 12^2 \times 11^2 \times 4^2 \times 3^2 =$	240	$\times$ 31667 =	7600
2	39	$42^2 \times 31^2 \times 12^2 \times 11^2 \times 4^2 \times 3^2 =$	314	$\times$ 32781 =	10293
3	31	$42^2 \times 39^2 \times 12^2 \times 11^2 \times 4^2 \times 3^2 =$	987	$\times$ 26879 =	20529
4	12	$42^2 \times 39^2 \times 31^2 \times 11^2 \times 4^2 \times 3^2 =$	6590	$\times$ 34008 =	225060
5	11	$47^2 \times 39^2 \times 31^2 \times 12^2 \times 4^2 \times 3^2 =$	7842	$\times$ 35708 =	279960
6	4	$47^2 \times 39^2 \times 31^2 \times 12^2 \times 11^2 \times 3^2 =$	58809	$\times$ 33245 =	1871456
7	3	$47^2 \times 39^2 \times 31^2 \times 12^2 \times 11^2 \times 4^2 =$	104438	$\times$ 31800 =	3342928
			180220		5763820

And, therefore,

$$H = \text{mean value of the combinated incomes} = \frac{576382000}{180200}$$

$$= 31{,}992 \text{ mill. Drachmas.}$$

We have consequently the following values of the Greek national income for 1929 :

Computed from old calculation	32 Bill. Dr.
Rediadis	35

V. — National wealth of Greece.

No assessment of Greek national wealth has been made these last years. From the past also we have only two valuations.

Mulhall gives the figure of 211 million English Pounds for 1883 (Mulhall, *Dictionnary of Stat.*, 1884) without any details of his valuation.

Skiadas gives (l. c.) the following for 1891 :

Building	2672.2
Other immovable property	2089.5
Forest	252
Public house values	130
Bank & Societys' capitals	126
Other values	50
Total . . .	5319.7 mill. G. Dr.

If we endeavoure to bring these valuations up to 1929, the results would be very far from any approximation.

In order, however, to get an idea of the Greek national wealth in 1929, we may use the comparative percentage of the income to the wealth, which is approximately adopted in the case.

The percentage of income to wealth deduced form the numbers of Mulhall is 0,10 and from those of Skiadas about 0.124. Gini says "A study of the figures representing national income and wealth estimated by various authors shows that the income ratio varies from 12.5 % (pre-war) to 15 % (post-war) of the wealth in countries having

accumulated wealth and in which national securities are already well exploited (as in France) to about 20 % in countries like British India with very low average wealth and a superabundant population. For Italy a percentage of from 17 to 18 is a reasonable one, analogous to that ascertained for Austria-Hungary, a country resembling Italy in many economic aspects, although considerably richer " (GINI, l. c.). For Spain VANDELLOS' gives the number 14 (pre-war) and 15 (post-war) (VANDELLOS, l. c.)

I think that for Greece an average between SKIADAS figure (12,5) and 18, i. e. 16 % is a reasonable one. This should give for each of the above stated values of the national income of Greece, the following values for the Greek national wealth.

Computed from previous calculations of income. .	212 bill. Dr.
REDIADIS	233

Professor GINI informs me that Dr. ZORAS in a study made in Rome, has estimated the Greek national wealth at 220 bill. Drachm. approaching my estimate of the national income of 35 bill., especially if a percentage of 0.15 instead of 0.16 should be considered.

Athens, Parliament, 1930.

Pubblicazioni ricevute. Publications reçues.
Publications received. Erhaltene Veröffentlichungen.

Periodici. — Périodiques. Periodicals. — Zeitschriften.

Alcuni indici della Situazione Economica Italiana e del Lazio. — Anno 1928: n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929: n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

L'Amministrazione Fascista. — Anno 1929: n. 6-7, 8, 9, 10, 11, 12.

Le Assicurazioni sociali. — Anno 1929: gennaio-febbraio; marzo-aprile; maggio-giugno; luglio-agosto; settembre-ottobre; novembre-dicembre e supplementi bimestrali.

L'Assistenza Sociale nell'industria. — Anno 1929: gennaio-febbraio; marzo-aprile; maggio-giugno; luglio-agosto; settembre-ottobre; novembre-dicembre.

Atti della R. Accademia dei Georgofili. — Anno 1928: Disp. 3ª e 4ª. Anno 1929: Disp. 1ª, 2ª, 3ª, 4ª.

Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. — Anno 1928-29: Tomo LXXXVIII, Disp. 8ª; Anno 1929-30: Tomo LXXXIX, Disp. 1ª, 2ª, 3ª, 4ª.

Augustea. — Anno 1929: n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24.

Bollettino del Consiglio Provinciale dell'Economia di Brescia. — Anno 1929: n. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Bollettino del Consiglio Provinciale dell'Economia di Firenze. — Anno 1928: n. 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Bollettino del Consiglio Provinciale dell'Economia di Gorizia. — Anno 1928: n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929: n. 4, 5.

Bollettino del Consiglio Provinciale dell'Economia di Trieste. — Anno 1928: n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

Bollettino del Consiglio Provinciale dell'Economia di Udine. — Anno 1929: n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Bollettino del Consiglio Provinciale dell'Economia di Venezia. — Anno 1929: gennaio, marzo, aprile, giugno.

Bollettino della Federazione Nazionale Fascista delle Imprese Assicuratrici. — Anno 1928: n. 5, 6, 7, 8. 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. Anno 1929: n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25.

Bollettino dell'Istituto Statistico Economico. — Anno 1928 : n. 7, 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9-10, 11-12.

Bollettino Mensile della Laniera. — Anno 1928 : n. 7, 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929 : n. 1, 2.

Bollettino Settimanale della Laniera. — Anno 1928 completo; Anno 1929 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10.

Bollettino del Lavoro e della Previdenza Sociale. — Anno 1928 : n. 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Bollettino delle Malattie infettive nel Regno (*Ministero dell'Interno*). — Anno 1928 : dal n. 21 al n. 52. Anno 1929 : dal n. 1 al n. 52.

Bollettino Mensile della Società delle Nazioni. — Anno 1929, completo.

Bollettino mensile di statistica dell'Istituto Centrale di Statistica del Regno. — Anno 1928 : n. 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929 : completo.

Bollettino di Notizie Economiche. — Anno 1928 : n. 7, 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7-8, 9-10, 11, 12.

Bollettino quindicinale dell'Argentina. (*Dott. Osvaldo Riso*). — Anno 1929 : giugno, luglio, agosto, settembre, ottobre, novembre, dicembre.

Bollettino quindicinale dei prezzi. — Anno 1928 : dal luglio al dicembre. Anno 1929 : completo.

Bollettino Sanitario del Bestiame (*Ministero dell'Interno*). — Anno 1929 : completo.

Bollettino di Statistica Agraria e Commerciale (*Istituto Internazionale d'Agricoltura*). — Anno 1928 : agosto, settembre, ottobre, novembre, dicembre. Anno 1929 : completo.

Bollettino di Statistica Agraria e Forestale (*Istituto Centrale di Statistica*). Anno 1929 : completo.

Commercio (*Confederazione Nazionale Fascista dei Commercianti*). — Anno 1929 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12.

Il Comune di Ravenna. — Anno 1928 : 1°, 2°, 3°, 4° trimestre. Anno 1929 : 1° e 4° trimestre.

Consiglio Provinciale dell'Economia di Milano. — Listino dei prezzi. Anno 1928 : dal n. 30 completo. Anno 1929 : completo.

Numeri indici settimanali di borsa. — Anno 1928 : dal 2 luglio al 31 dicembre completo. Anno 1929 : completo.

Numeri indici settimanali dei prezzi all'ingrosso in Italia, Francia, Inghilterra, Germania ed America. — Anno 1928 : dalla prima settimana di luglio alla quarta settimana di dicembre. Anno 1929 : completo.

Dati mensili relativi all'esercizio delle Ferrovie dello Stato. — Anno 1929 : completo.

Il Diritto Aeronautico. — Anno 1929 : completo.

Il diritto del lavoro. — Anno 1928 : completo. Anno 1929 : gennaio-febbraio ; marzo, aprile, maggio.

Echi e Commenti. — Anno 1928 : n. 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36. Anno 1929 : completo.

Economia. — Anno 1928 : agosto, settembre, ottobre, novembre, dicembre. Anno 1929 : gennaio, maggio, giugno, luglio, agosto, settembre, ottobre, novembre, dicembre.

L'esportatore italiano. — Anno 1928 : n. 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929 : completo.

I Figli d'Italia. — Anno 1928 : luglio, agosto, settembre, ottobre.

La Finanza Cooperativa. — Anno 1928 : n. 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929 : n. 1-2-3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

La Finanza Locale. — Anno 1928 : n. 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929 : completo.

La Finanza Meridionale. — Anno 1° : dicembre 1929, n. 1.

Il Giornale Economico. — Anno 1928 : n. 7, 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929 : completo.

Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica. — Anno 1928 : luglio, agosto, settembre, ottobre, novembre, dicembre. Anno 1929 : completo.

Giornale di Matematica Finanziaria. — Anno 1928 : n. 4, 5, 6.

Indici del Movimento Economico Italiano. — Anno 1928 : fasc. 3, 4. Anno 1929 : completo.

L'Italia che scrive. — Anno 1928 : n. 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929 : completo.

La Marina Italiana. — Anno 1928 : n. 7, 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929 : completo.

Massimario di Giurisprudenza Privata. — Anno 1928 : n. 6, 7, 8, 9, 10, 11. Anno 1929 : n. 1, 2.

Notiziario Economico dell'Argentina. — Anno 1928 : n. 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24. Anno 1929 : completo.

Nuovi studi di Diritto, Economia e Politica. — Anno 1928 : gennaio, marzo, maggio, luglio, settembre, novembre.

L'Organizzazione Industriale. — Anno 1929 : completo.

L'Organizzazione scientifica del Lavoro. — Anno 1928 : giugno, luglio, agosto, settembre, ottobre, novembre, dicembre. Anno 1929 : completo.

Politica Sociale. — Anno 1929 : aprile-maggio ; giugno ; luglio-agosto ; settembre ; ottobre-novembre ; dicembre.

Prezzi correnti delle merci sulla piazza di Livorno. — Anno 1928 : completo. Anno 1929 : completo.

Problemi Siciliani. — Anno 1928 : completo. Anno 1929 : n. 1, 2, 3, 4.

La Proprietà edilizia. — Anno 1929 : n. 1-2.

Rassegna delle Assicurazioni. — Anno 1928 : aprile, maggio-giugno.

Rassegna Economica dell'Abruzzo Teramano. — Anno 1928 : n. 7, 8, 10, 11, 12. Anno 1929 : n. 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

La Rassegna d'Ostetricia e Ginecologia. — Anno 1928 : giugno, luglio, dicembre. Anno 1929 : maggio, giugno, agosto.

La Rassegna della Previdenza Sociale. — Anno 1928 : n. 7, 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929 : completo.

La Rassegna quindicinale dell'Agricoltura. (*Banca Nazionale dell'Agricoltura*). — Anno 1929 : completo.

Rassegna di Studi Sessuali e di Eugenica. — Anno 1928 : n. 2-3. Anno 1929 : n. 1, 2, 3.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. — Anno 1928 : Tomo LII, n. III. Anno 1929 : Tomo LIII, n. I.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. — Anno 1928 : n. 6-10, 11-15, 16-20. Anno 1929 : n. 1-5, 6-10, 11-15.

La Riforma sociale. — Anno 1928 : luglio-agosto, settembre-ottobre, novembre-dicembre. Anno 1929 : completo.

Rivista d'Amministrazione e finanza. — Anno 1928 : luglio, agosto, settembre, ottobre, novembre, dicembre. Anno 1929 : gennaio, febbraio, marzo aprile, maggio, giugno.

Rivista delle Assicurazioni. — Anno 1928 : n. 7, 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Rivista Bancaria. — Anno 1928 : completo. Anno 1929 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11.

Rivista di Diritto Agrario. — Anno 1928 : n. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929 : completo.

Rassegna del mercato dei carboni. — Anno 1929 : n. 64.

Rivista del Diritto Commerciale. — Anno 1928 : n. 7, 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929 : completo.

Rivista di diritto del lavoro, — Anno 1929 : completo.

Rivista di Economia Finanziaria. — Anno 1928 : completo. Anno 1929 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Rivista Mensile. — Anno 1928 : completo. Anno 1929 : completo.

Rivista Mensile della Città di Trieste. — Anno 1928 : luglio, agosto, settembre, ottobre, novembre, dicembre. Anno 1929 : completo.

Rivista Mensile della Città di Venezia. — Anno 1928 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929 : n. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

Rivista di Politica Economica. — Anno 1928 : luglio, agosto, settembre, ottobre, novembre, dicembre. Anno 1929 : completo.

Rivista di Sociologia. — Anno 1928 : luglio-agosto, n. 1. Anno 1929 : gennaio-marzo.

Scientia. — Anno 1928 : completo. Anno 1929 : completo.

Statistica del commercio speciale di importazione ed esportazione. (*Ministero delle Finanze*). — Anno 1928 : completo. Anno 1929 : completo.

Studi Senesi. — Anno 1928 : completo. Anno 1929 : n. 3.

La Vita Italiana. — Anno 1929 : completo.

Bulletin de la Banque Nationale de Tchécoslovaquie. — Année 1928 : complète. Année 1929 : complète.

Bulletin d'Information (*Organe de la Société pour les relations culturelles entre l'U. R. S. S. et l'Etranger*). — Année 1928 : nº de 25 à 52. Année 1929 : nº de 1 à 25, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 39, 40, 48, 49.

Bulletin Mensuel de l'Institut International de Coopération Intellectuelle. Année 1928 : complète. Année 1929 : complète.

Bulletin de l'Office Permanent de l'Institut International de Statistique. — Année 1928 : juillet, août, septembre, octobre, novembre, décembre. Année 1929 : complète.

Bulletin Mensuel de Statistique de la Société des Nations. — Année 1928 : août, septembre, octobre, novembre, décembre. Année 1929 : complète.

Bulletin de la Statistique Générale de la France. — Année 1928 : juillet ; septembre ; octobre ; décembre. Année 1929 : complète.

Bulletin Officiel du Bureau International du Travail. — Année 1928 : nº 3, juillet ; nº 4, novembre. Année 1929 : vol. XIV, nº 1, mai ; nº 2 septembre ; nº 3, décembre.

Chronique Mensuelle des Migrations (*Bureau International du Travail*). Année 1928 : nº 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Année 1929 : nº 3, 4.

Chronique de la Sécurité Industrielle (Bureau International du Travail). — Année 1928 : juillet, août, septembre-octobre, novembre-décembre. Année 1929 : janvier-février, mars-avril, novembre, décembre.

Hygiène du Travail (Bureau International du Travail). — Année 1928 : fasc. de nº 156 à 178. Année 1929 : nº de 179 à 212.

Informations sociales (Bureau International du Travail) — Année 1928: vol. XXVII complet ; vol. XXVIII, complet. Année 1929 : vol. XXIX complet ; vol. XXX complet ; vol. XXXI complet ; vol. XXXII complet.

Indices du Mouvement général des Affaires en France et divers pays. — Année 1928 : nº 3, 4. Année 1929 : complète.

Journal de la Société Hongroise de Statistique. — Année 1928 : nº 2, 3-4. Année 1929 : nº 1, 2, 3, 4.

Journal de la Société de Statistique de Paris. — Année 1928 : juillet-août, septembre, octobre, novembre, décembre. Année 1929 : complète.

La Prévoyance. — Année 1928 : vol. 7, nº 2, 3, 4, 5, 6, 7. Année 1929 : vol. 8, nº 2, 3, 4, 5.

La Prophilaxie mentale. — Année 1929 : nº 18, 21.

L'Epargne du monde. — Année 1928 : nº 10, 11, 12. Année 1929 : complète.

Le Moniteur Officiel du Commerce et de l'Industrie. — Année 1928 : compléte. Année 1929 : complète.

Le Mouvement Syndical International. — Année 1928 : n. 6, 7, 8, 9, 11, 12. Année 1929 : complète.

Le Musée Social. — Année 1928 : nº 7, 8, 9, 10, 11, 12. Année 1929 : complète.

Matériaux pour l'étude des Calamités. — Année 1928 : avril-juin, juillet, septembre. Année 1929 : nº III.

Notices Bibliographiques (*Bureau International du Travail*). — Année 1928 : août, septembre, octobre, novembre, décembre. Année 1929 : janvier, mars.

Pax (*Organe Hebdomadaire de la Solidarité Européenne*). — Année 1929 : complète.

Rapports économiques et Statistiques Sociales. — Année 1928 : complète. Année 1929 : nº 1.

Rapport Epidémiologique mensuel de la section d'Hygiène du secrétariat de la Société des Nations. — Année 1928 : nº 7, 8, 9, 10, 11, 12. Année 1929 : complète.

Recueil Mensuel de l'Institut International du Commerce. — Année 1929 : Tome XVIII, nº 4, 5.

Revue des Etudes Coopératives. — Année 1928 : octobre-décembre, nº 29.

Revue de l'Institut de Sociologie (Solvay). — Année 1928 : complète. Année 1929 : complète.

Revue Internationale du Travail. — Année 1928 : juillet, août, septembre, octobre, novembre, décembre. Année 1929 : complète.

Série Législative (*Bureau International du Travail*). — Année 1928 : Cahiers août, septembre, octobre, novembre, décembre. Année 1928 : juillet, août, septembre, octobre, novembre, décembre. Année 1929 : complète.

Société de Banque Suisse. — Année 1928 : juillet, août, septembre, octobre, novembre, décembre. Année 1929 : complète.

Bank of Finland. — Year 1928 : Nr. 7, 8, 9, 10, 11, 12. Year 1929 : complete.
Bulletin of Labour Statistic (*U. S. Department of Labour*). — Year 1928 : nr. 456, 459, 460, 458, 457, 462. Year 1929 : nr. 485, 492, 494.
Bulletin of the Pan American Union. — Year 1929 : july, august, september, october, november, december.
Bulletin of the Stable Money Association. — Year 1928 : november, december. Year 1929 : january, february, march, april, may, june, december.
Bulletin of the Wooll Manufacturers. — Year 1928 : complete. Year 1929 : complete.
Crops and Markets. — Year 1928 : nr. 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Year 1929 : complete.
Ecology. — Year 1928 : nº 4, october. Year 1929 : nr. 1, 2, 3, 4.
Economica. — Year 1928 : nr. 24. Year 1929 : nr. 25, 26, 27.
Economic Bulletin of the Conjuncture Institute. — Year 1928 : nº 1.
Economic Journal. — Year 1928 : nº 151. Year 1929 : nr. 153, 154, 155.
Eugenic Review. — Year 1928 : nº 2. Year 1929 : nr. 1, 2, 3.
Foreign Crops and Markets. — Year 1929 : complete.
Guaranty Trust Company. — Year 1928 : june. Year 1929 : june, september, october.
Harvard Economic Service (Weekly letter). — Year 1928 : july to december, summary. Year 1929 : complete and summary.
Illinois Health Messenger. — Year 1929 : complete.
Illinois Health News. — Year 1929 : nr. 1, 3, 4.
Industrial Hygiene Bulletin. — Year 1928 : august, september, october, november, december. Year 1929 : complete.
International Cotton Bulletin. — Year 1928 : november. Year 1929 : complete.
Journal of the Educational Research. — Year 1928 : complete. Year 1929 : complete.
Labour Gazette. — Year 1928 : complete. Year 1929 : complete.
London and Cambridge Economic Service. — Year 1928 : complete. Year 1929 : complete.
Michigan Public Health. — Year 1928 : nr. 7, 8, 9, 10, 11, 12. Year 1929 : complete.
Monthly Labour Review. — Year 1929 : april, may, june, july, august, september, october, november, december. Year 1929 : january to october.
Monthly Vital Statistics. — Year 1928 : august, november, december. Year 1929 : january, february, may, june, july, september, october, november, december.
Official Year Book of the New South Wales. — Year 1928-29 : Part. I, II, III, IV, V, VI, VII.
Prices and Prices Indexes. — Year 1929 : complete.
Quarterly Statistical Bulletin New South Wales. — 1928 complete. Year 1929 : complete.
Social Science Abstracts. — Year 1929 : march to december.

Special Bulletin State of New York. — Year 1928 : nr. 154, 155, 157. Year 1929 : nr. 158, 159, 160.

Statistical Bulletin Metropolitain Life Insurance Co. — Year 1928 : july august, september, october, november, december. Year 1929 : january to september.

The American Economic Review. — Year 1928 : september, dicember. Year 1929 : complete.

The Industrial Bulletin. — Year 1928 : july, august, october, november, december. Year 1929 : january, february, april, june, july, august, september, october, november, december.

The Journal of the Royal Statistical Society. — Year 1928 : complete. Year : 1929 : complete.

The Quarterly Journal of Economics. — Year 1928 : nº 3 and 4. Year 1929 : complete.

The Review of Economic Statistic. — Year 1929 : nr. 1, 2, 3, 4.

Transactions Actuarial Society. — Year 1928 : vol. XXIX, part two nr. 80. Year 1929 : vol. XXX, part one nr. 81, part. two nr. 82.

Vital Statistics Bulletin (Pennsylvania). — Year 1928 : august, september, october, november, december. Year 1929 : complete.

Allgemeines Statistisches Archiv. — Jahrgang 1929 : vol. XVIII-vollständing. Vol. XIX, vollständig.

Archiv für soziale Hygiene und Demographie. — Jahrgang 1928 : Heft 4, 5, 6. Jahrgang 1929 : Heft 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Berliner Wirtschaftsberichte. — Jahrgang 1928, vollständig. Jahrgang 1929 : nr. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24.

Deutsches Statististisches Zentralblatt. — Jahrgang 1928, vollständig. Jarhgang 1929, vollständig.

Kolner Vierteljahrshefte für Soziologie. — Jahrgang 1928 : Nr. 1, 2, 3, 4. Jahrgang 1929 : Nr. 1, 2, 3.

Monatliche Nachveise über den auswartigen Handel Deutschlands. — Jahrgang 1928, vollständig : 1929, vollständig.

Monatsbericht des Statistischen Amts der Stadt Berlin. — Jahrgang 1928, vollständig. Jahrgang 1929 : Januar, Februar, März, April, Mai, Juni, Juli.

Wirtschaft und Statistik. — Jahrgang 1929, vollständig.

Zeitschrift fur Schweizerische Statistik. — Jahrgang 1929, Nr. 1, 2, 3, 4.

Zeitschrift des Preussischen Statistischen Landesamts. — Jahrgang 1929 : Nr. 1.

Annuaire Statistique de la République Polonaise. — Année 1928. Année 1929.

Banque Nationale du Royaume de Yougoslavie. — Année 1929 : nº 3.

Boletín Demográfico de España. — Anno 1929 : ottobre-novembre-dicembre. Anno 1929 : gennaio-febbraio-marzo.

Boletim Hebdomadario de Estadistica Demographo-Sanitaria de Rio de Janeiro. — Anno 1929 : completo.

Boletim do Instituto de Café de Estado de São Paulo. — Anno 1928 : luglio, agosto, settembre, ottobre, novembre dicembre. Anno 1929 : completo.

Boletim Mensal de Estadistica Demographo-Sanitaria da Citade de Rio de Janeiro. — Anno 1928 : completo. Anno 1929 : da gennaio ad agosto.

Boletim Mensal de Estadistica Demografo-Sanitaria de São Paulo. — Anno 1928 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12.

Boletín de Estadística (Madrid). — Anno 1928 : luglio-agosto-settembre.

Boletin Mensual de Estadística Agro-Pecuaria de Buenos Aires. — Anno 1928 : completo. Anno 1929 : da gennaio a giugno compreso.

Bulletin de la Banque Nationale de Roumanie. — Anno 1929 : nº 1.

Bulletin Mensuel du Commerce des Pays-Bas. — Année 1928 : janvier, février, mars, octobre, novembre, décembre.

Bulletin Mensuel de Statistique du Royaume de Bulgarie. — Année 1928 : Nº 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Année 1929 : nº 1, 2, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Bulletinul Statistic al României. — Anno 1928 : nº 1, 2, 3, 4. Anno 1929 : nº 1, 2.

Cenovè Spravy (*Rapports sur les prix de l'Office de Statistique de la République Tchécoslovaque*). — Anno 1928 : nº 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22,23, 24, 25, 26, 27. Anno 1929 : completo.

Ceskoslosloveńsky Statisticky Vestnik. — Année 1928 : nº 1-3, janvier. nº 4-6, avril. nº 7-8, juillet nº 9-10, novembre. Année 1929.

El comercio exterior argentino. — Anno 1928 : nº 201, 202, 203, 204. Anno 1929 : nº 205.

Commerce Extérieur de la République Polonaise. — Année 1928 : complète. Année 1929 : complète.

Kommersiella Meddelanden (Stockholm). — Année 1929 : nº 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24.

Lwów w Cyfrach (*Léopol en chiffres*). — Année 1928 : complète. Année 1929 : complète.

Maandschrift van Het Centraal Bureau voor de Statistick. — Année 1929 : complète. Année 1928 : nº 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Manedsopgaver over Vareomsetningenmed Utlandet. — Année 1928 : complète. Année 1929 : complète.

La medicina Argentina. — Anno 1929 : n. 83, 91.

Mesicni Preehled Zahranicniho Obchodn, Republiky Ceskoslovenske. — Année 1928 : nº 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Année 1929 : complète.

Le Mouvement du Commerce Extérieur de la Bulgarie. — Année 1929 : nº 2, trimestre.

Rapport de l'Office de Statistique de la République Tchécoslovaque. — Année 1928. Année 1929 : complète.

Revista Económica. — Année 1928 : nº 1, 2, 3, 4, 5. Année 1929, complète.

Revista de Economía Argentina. — Anno 1928 : nº 7, 8, 9, 10, 11, 12. Anno 1929 : completo.

Revue trimestrielle de la Direction Générale de la Statistique de Bulgarie. — Année 1929 : Fasc. II, III, juillet-décembre.

Revue trimestrielle de Statistique de la République Polonaise. — Année 1928 : complète. Année 1929 : complète.

Statistique du Travail (de la République Polonaise). — Année 1928 : nº 4. Année 1929 : complète.

Statistique de l'Abatage du Bétail (de l'Office Central de Statistique de la République Polonaise). Année 1929 : complète.

Statistique des Prix (Office Central de la République Polonaise). — Année 1929 : complète.

Tilastokatsauksia (Helsingfors). — Année nº 7, 8, 9, 10, 11, 12. Année 1929 : complète.

I A Ulkomaankauppa. (Hensinski). — Année 1928 : juin, juillet, septembre, octobre, novembre, décembre. Année 1929 : complète.

I A Ulkomaankauppa Vuosijulkaisu. — Anno 1928.

Wiadomosci Statystyczne (Miasta Poznania). — Année 1928 : nº 7, 8, 9, 10, 11, 12. Année 1929 : complète.

Wiadomosci Statystyczne (Informations statistiques de l'Office central de Statistique). — Année 1928 : nº de 15 à 24. Année 1929 : complète.

Libri, Annuari, Opuscoli, Estratti, ecc.

Livres, Annuaires, Brochures, Extraits, etc.

Books, Yearbooks, Pamphlets, Reprints, etc.

Bücher, Jahrbücher, Broschüren, Separatabdrücke, usw.

ABATE MARCO e GUIDO GENTILE. — *Resoconto sintetico del I° Congresso Nazionale di Scienza dell'Assicurazione.* Torino, 20-23 settembre 1928.

ABETTI A. — *Discorso sulla Cassa Mutua Cooperativa Italiana per le pensioni.* Firenze, 1909.

ID. — *Spiegazione per la intelligenza dei principali elementi del sistema solare.* Estr. da « Rivista di Astronomia e Scienze Affini ». Torino, 1912.

ACERBO GIACOMO. — *Storia ed ordinamento del credito agrario nei diversi paesi.* Piacenza, Federazione Italiana dei Consorzi Agrari, 1929.

AGOSTINONE EMIDIO. — *Hangars e tende.* « L'Economia Nazionale ». Novembre 1928, Milano.

ALBERTARIO PAOLO. — *La riforma fondiaria in Cecoslovacchia,* 1929.

ID. — *Sono le attuali condizioni della produzione del latte nella Bassa Lombardia peggiorate nel confronto dell'anteguerra?* « Annuario dell'Istituzione Agraria », fasc. 5, vol. XVII, 1929.

ALBERTI MARIO. — *L'« Homo Œconomicus » e l'esperienza fascista.* « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica », gennaio 1929.

ALBERTONI PIETRO e FELICE ROSSI. — *Nuove ricerche sulla influenza delle proteine animali nei vegetariani.* Bologna, 1910.

ALBERTONI PIETRO e IVO NOVI. — *Sul bilancio nutritivo di una famiglia borghese Italiana.* Bologna, 1897.

ALBERTOTTI GIUSEPPE. — *Il caso clinico « Marconi ».* Venezia, 1928.

ALESSANDRINI GIULIO. — *Parassitologia dell'uomo e degli animali.* « Trattato Italiano d'Igiene ».

ALMAGIÀ R. — *Problemi ed indirizzi attuali della Geografia.* — « Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze ». Torino, settembre 1928.

ALOI L. — *La coltivazione del frumento. Le nuove razze e le norme razionali di coltura.* Hoepli, Milano, 1927.

AMOROSO LUIGI. — *Esercizi di geometria analitica e proiettiva.* 2ª edizione. Vol. I.

ID. — *Italia e Francia e le ferrovie transahariane.* Estr. « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica ». Serie III, Vol. XLV, fasc. novembre-dicembre 1912.

Amoroso Luigi. — *Uno stato nello Stato.* « Giornale degli Economisti e Riv. di Statistica ». Giugno 1913.

Anile A. — *La cura immunizzante della malaria.* 1929.

Annali di Economia. — Vol. V, N. 1 e 2 ; Vol. VI, N. 1.

Annali dell'Istituto di Statistica della R. Università di Bari. — Anno 1927-28.

Annali di Statistica. (Istituto Centrale di Statistica). Serie VI, Vol. III, IV, V, 1929.

Annuario dell'automobilismo. — 1928-29.

Annuario Biografico del Circolo Matematico di Palermo. — 1928.

Annuario Italiano delle Imprese Assicuratrici. — 1928.

Annuario del R. Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Torino. — Anni 1927-28 e 1928-29.

Annuario del R. Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Venezia. — Anno 1927-28.

Annuario della R. Università degli Studi Economici e Commerciali di Trieste. — Anno 1927-28.

Annuario della R. Accademia dei Lincei. — 1925.

Annuario degli Istituti Scientifici Italiani. — 1928.

Annuario Statistico della Sassonia. — 1929.

Annuario della R. Università di Cagliari. — 1911-12.

Anzilotti Eugenio. — *I trattati di commercio nell'anno* 1927. « Annuario di Politica Estera ». 1928.

Id. — *Dal neoguelfismo all'idea liberale.* — Milano, 1917, Albrighi & Segati.

Arcangeli Ageo. — *La nozione giuridica di commercio.* « Rivista del Diritto Commerciale », anno XII, n. 5, parte 1ª.

Arangio Ruiz Vincenzo. — *La formule con demostratio e la loro origine.* Cagliari, 1912.

Id. — *Rivista di papirologia giuridica per l'anno* 1909. Estr. dal « Bollettino dell'Istituto di Diritto Romano », anno XXIII, fasc. I-VI, 1910.

Id. — *Rivista di papirologia giuridica per l'anno* 1910. Ibidem, anno XXIV, fasc. I-VI.

Archivio Scientifico del Regio Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali. Bari, Vol. I e II, anno Acc. 1926-27 ; 1927-28.

Archivio Storico Sardo. — Vol. VII, fasc. 1-4 ; Vol. VII, fasc. 3-4.

Arena Celestino. — *Procedimenti corporativi di formazione e attuazione delle leggi del lavoro.* Roma, 1929.

Artom Cesare. — *Commemorazione di Lazzaro Spallanzani nel secondo centenario della sua nascita* (10 dicembre 1929). Pavia, 1930.

Id. — *Costituzioni genetiche nuove per mutazionismo e per incrocio.* 2° Congresso di Genetica ed Eugenica, settembre 1929, Roma.

Id. — *Il comportamento della sostanza cosmica e dell'apparato condriosomico nella spermatogenesi dimorfa di Paludina vivipara Linn.*, da « Ricerche di Morfologia », Vol. I, fasc. 1-2.

— *Nuovi fatti e nuovi problemi sulla biologia e sulla sistematica del genere* Artemia, Roma, 1920.

Assagioli Roberto. — *Il subcosciente.* « Rivista di Filosofia », anno III, fasc. II, 1911.

ASSAGIOLI ROBERTO. — *Psicologia e Psicoterapia*. Estr. da « Psiche », anno II, n. 3, 1913.

ALESSANDRIA GIUSEPPE. — *Giovanni Botero. Note Bibliografiche*, 1928.

ASQUER GIUSEPPE. — *La « quarta regia » nella storia e nell'economia*. Cagliari, 1913.

LE ASSICURAZIONI SOCIALI. — *Assicurazione obbligatoria contro la tubercolosi*. 1928.

ASSOCIAZIONE FRA LE SOCIETÀ ITALIANE PER AZIONI. — *Le esportazioni italiane negli anni* 1911-1913 *e* 1923-27, Roma, 1928.

ID. — *Notizie statistiche*, 1928.

ID. — *Piccolo Annuario Statistico Italiano*, 1929.

ASSOCIAZIONE NAZIONALE VOLONTARI DI GUERRA. — *Il decennale*. 1928.

ASSOCIAZIONE DEGLI SCRITTORI EBREI IN PALESTINA. — *Manifesto*, ottobre.

ATTI DELL'ASSEMBLEA GENERALE TENUTA IN ROMA DAL 18 AL 21 DICEMBRE 1916 DALL'ASSOCIAZIONE FRA I PROFESSORI UNIVERSITARI. « Rivista Pedagogica », anno X, fasc. 3-4, 1917.

IBIDEM. — Roma, 5-7 gennaio 1911.

IBIDEM. — Roma, luglio 1918-febbraio 1919.

IBIDEM. — Roma, 13 febbraio-10 giugno 1919.

ATTI DEL IV CONGRESSO INTERNAZIONALE DI FILOSOFIA. — *Sedute generali*, Bologna 1911.

ID. — *Sedute delle sezioni*.

ATTI DEL CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI. Bologna, settembre 1928, tomo I.

ATTI DEL CONVEGNO COSTITUTIVO DELLA FEDERAZIONE NAZIONALE ALBERGHI E TURISMO. Roma, 29-30 aprile 1928.

ATTI DELLA FONDAZIONE CAGNOLA DALLA SUA ISTITUZIONE IN POI. 1926-27. Vol. 28°.

ATTI DELL'ISTITUTO NAZIONALE DELLE ASSICURAZIONI. Vol. 1°.

ATTI DELLA SOCIETÀ FILOSOFICA ITALIANA. Estr. dalla « Rivista di Filosofia », anno I, nn. 1, 2, 3, 4, 1909.

ID. — Anno II, fasc. 1°, 1910.

ATTI DELLA SOCIETÀ ITALIANA PER IL PROGRESSO DELLE SCIENZE. — 3ª *Riunione*. Padova, settembre 1909.

AVALLONE ALFREDO. — *I servizi demografici nelle città*. Roma, 1930.

AZEGLIO FILIPPINI. — *Igiene dei trasporti*. « Trattato Italiano d'Igiene ».

BACHI RICCARDO. — *Sulla costruzione dei barometri economici in Italia*. « Annali di Economia » Università Bocconi. Vol. IV, n. 2.

BALDACCI A. e BÉGUINOT. — *Contributo alla flora autunnale ed invernale dei dintorni di Vallona*. 1918.

BALDUCCI GAETANO. — *Sulla mortalità degli insegnanti elementari pensionati*. Contributo allo studio della stabilità delle frequenze di nascite. « Metron », Vol. 1, n. 2, 1920.

BALELLA G. — *Lezioni di legislazione del lavoro*. Università df Roma. Parte 1ª, 1927.

BANCA COMMERCIALE ITALIANA. — *Cenni statistici sul movimento economico dell'Italia. Progresso economico dell'Italia nel ventennio* 1893-1912, gennaio 1913.

BANCA COMMERCIALE ITALIANA. — *Movimento economico dell'Italia.* Volume XVIII, Milano, 1929.

BANCA D'ITALIA. — *Adunanza generale ordinaria degli azionisti tenuta in Roma il 28 marzo* 1929.

ID. — *In memoria di Pasquale d'Aroma,* 1929.

BANCA NAZIONALE DELL'AGRICOLTURA. — *Credito Agrario, Bonifiche e Irrigazioni in Italia.* 1928.

BANCA NAZIONALE DI ALBANIA. — *Relazione sul Bilancio al 31 dicembre* 1928.

BANCA POPOLARE COOPERATIVA DI SULMONA. — *Relazione del Consiglio di Amministrazione* (1890).

BANCO DI SICILIA. — *L'agricoltura in Sicilia nel* 1927. *I tributi erariali.*

ID. — *Il commercio della Sicilia nel* 1927, a cura del Prof. Salvatore Abbadessa.

— *Notizie sulla economia siciliana.* Anno 1927.

BARI (COMUNE DI). — *Per l'istituzione della R. Università degli studi in Bari,* 1920.

BARTOLOMEI A. — *Le ragioni della giurisprudenza pura.* Napoli, 1912.

BARUCHELLO MARIO. — *Salari italiani e salari francesi.* « L'Unione Industriale », 1928.

BATTISTINI MARIO. — *Le relazioni di Adolfo Quetelet con i dotti italiani.* Siena, 1929.

BECCARI NELLO. — *Il muscolo traverso del torace e le inserzioni sternocostali del diaframma nell'uomo.* Firenze, Nicolai, 1914.

BÉGUINOT AUGUSTO. — *Contributo alla flora delle isole del Capo Verde e notizie sulla sua affinità ed origine.* Genova, 1917.

ID. — *Contribuzione alla biologia dell'Arcipelago Toscano.* Studio biogeografico. Firenze, 1903.

ID. — *I distretti floristici della regione litoranea dei territori circumadriatici.* « Rivista Geografica Italiana », fasc. I-II-III-IV, 1916.

ID. — *Eterocarpia e polimorfismo nella « Calendula arvensis L. ».* Venezia, 1915.

ID. — *Flora Padovana.* Parte 3ª, Distribuzione geografica, 1914.

BÉGUINOT A., FORTI, NEGRI, PAMPANINI, TROTTER, VACCARI, ZODDA. — *Lo stato attuale delle conoscenze sulla vegetazione dell'Italia e proposte per la costituzione di un Comitato permanente « Pro flora italiana » per la regolare sua esplorazione.* Relazione e programma. Atti della Soc. it. per il Progresso delle Scienze, ottobre 1908.

ID. — *La fitogeografia — Sviluppo storico, contenuto e direttive moderne.* Istituto Geografico De Agostini.

ID. — *L'ipotesi dell'« Adria » nei rapporti con la corologia delle piante e degli animali.* Nota critica e programma di ricerche.

ID. — *L'Istituto e l'Orto Botanico della R. Università di Padova negli anni scolastici* 1916-17 *e* 1927-18. Padova, 1919.

ID. — *La vegetazione delle Isole Tremiti e dell'Isola di Pelagosa.*

ID. — *La vita delle piante superiori nella laguna di Venezia e nei territori ad essa circostanti.* Venezia, 1913.

ID. — *Notizie sull'erbario di G. B. Brocchi, conservato nel R. Museo civico di Bassano.* Roma, 1918.

BÉGUINOT A. — *Ricerche culturali sulle variazioni delle piante.* « Atti dell'Accademia Veneto-Trentina-Italiana », Vol. VIII, 1915.

ID. — *Saggio sulla flora e sulla fitogeografia dei colli Euganei.* « Società Geografica Italiana », Vol. XI. Roma, 1905.

ID. — *Sulla genetica di alcune entità del ciclo di solanum nigrum L.* Venezia, 1916.

BENINI RODOLFO. — *Imposte del bilancio monetario.* Bari, 1889.

ID. — *La capacità di resistenza nei contratti considerati nelle classi sociali e nei popoli.* « Prolusione al corso di Economia Politica », tenuta il 12 gennaio 1929 all'Università di Roma. « Economia », n. 2, anno III.

ID. — *Note di cosmografia dantesca,* da « Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere ». Serie II, Vol. XL, 1907.

BELLEZZA LUIGI. — *Pudori e silenzi antieugenici.* II Congresso di Eugenica e Genetica. Roma, 1929.

BERTOLINO ALBERTO. — *Bacone e l'economia.* 1929.

BIONDI CESARE. — *Note ed impressioni sul II° Congresso internazionale medico per gli infortuni sul lavoro.* Firenze, 1909.

ID. — *Romanità e fascismo.* Catania, 1929.

BIRAGHI PIETRO. — *L'informazione statistica nei trasporti. Necessità e metodo dei rilievi.* Città di Castello, 1928.

BOERI GIOVANNI. — *Sul comportamento delle sostanze estranee pervenute nel circolo sanguigno.* Milano, Vallardi.

ID. — *Sulla rieducazione fisica.* Da « La riforma medica », n. 49, anno XXVII, Napoli, 1912.

ID. — *Contributo alla semiologia gastrica mediante i raggi Röngten,* da « Il Tommasi », giornale di Biologia, Medicina e Chirurgia, anno VI, N° 31, 1911.

ID. — *Influenza dei primi prodotti della digestione sulla funzionalità neuromuscolare in rapporto ai diversi tipi di alimentazione e alle diverse condizioni di funzionalità gastrica.* Dal « Policlinico », vol. XVIII, 1911.

BOLAFFIO LEONE. — *La procedura dei piccoli fallimenti deve essere abrogata?* Da « Rivista di Diritto Commerciale », 1910, fasc. 9.

BOLASCO DI LAGORARA ENZO. — *Foscolo e Monti.* Esegesi critica. Roma, 1929.

BOLDRINI MARCELLO e UGGÈ ALBINO. — *La mortalità dei Missionari.* Milano, Università Cattolica del Sacro Cuore.

BOLDRINI MARCELLO. — *La diminuzione della mortalità e la selezione dei rischi assicurativi.* « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica ». Dicembre 1928.

ID. — *Sviluppo corporeo e predisposizioni morbose.* Milano.

BOLLETTINO PARLAMENTARE. — *Anno II, n.* 3, 1928. *Anno III n.* 1, 2, 1929.

BONACCI GIOVANNI. — *La nuova Italia* (precedono nozioni di geografia generale). « Rivista di Arti Grafiche ». Firenze, 1930.

ID. — *L'Italia vittoriosa e la sua espansione nel mondo.* Banca Italiana di Sconto. Roma.

ID. — *L'Italia economica e la volontà della stirpe.* Firenze, 1928.

BONACOSSA ALDO. — *Regione dell'Ortler.* Club Alpino Italiano. Milano, 1915.

BONARDELLI EUGENIO. *Lo stato di S. Paolo nel Brasile e l'emigrazione italiana.* 1916.

BONFANTE PIETRO. — *Le basi future dello Stato libero.* Discorso inaugurale all'anno scolastico 1918-1919. R. Università di Roma.

ID. — *Vincenzo Simoncelli, l'uomo, il maestro, il giurista.* Napoli, 1919.

BONFERRONI E. — *La soluzione generale del problema degli accumuli.* « Archivio Scientifico », 1927-28 e 1928-29.

BONOMI ZACCARIA. — *Resoconti e ragguagli della azienda rurale annessa al R. Istituto Tecnico di Udine.* 1904-1905, 1905-1906. « Annali del R. Istituto Tecnico di Udine », Serie II, 1909.

BORDIGA GIOVANNI. — *L'alta coltura e il domani.* Discorso inaugurale tenuto il 12-11-1918 alla R. Università di Padova.

ID. — *Per la esatta denominazione di classi del nuovo censimento nei riguardi dell'agricoltura e del mezzogiorno d'Italia.*

BORDIGA ORESTE. — *Spopolamento di montagne e ripopolamento di litorali.* R. Istituto Superiore Agrario di Portici.

BORSI UMBERTO. — *La collaborazione civica obbligatoria in circostanze di urgenza.* Bologna, 1929.

BORTOLOTTI ETTORE. — *La scuola di Matematica di Bologna.* Cenno storico. Bologna, 1928.

BOTTAI GIUSEPPE. — *Il Consiglio Nazionale delle Corporazioni.* Discorso tenuto alla Camera dei Deputati. — Dicembre 1929.

BOVERO ALFONSO. — *Su di alcune modalità di chiusura della dorica emidermica del rafe penieno.* Cagliari, 1910.

BRANDILEONE FRANCESCO. — *I lasciti per l'anima e l'art. 91 della legge sulle istituzioni pubbliche di beneficenza.* « Rivista di Diritto Pubblico », n. 5-6, parte II, 1912.

BREDA ACHILLE. — *Commemorazione tenuta alla R. Accademia di Scienze e Lettere ed Arti di Padova il 14 gennaio 1917.*

BRESCIA. — *Svolgimento delle attività produttrici della provincia.* Relazione Statistica 1927-28.

BRINI GIUSEPPE. — *Possessi di diritti e gestione di negozi in diritto romano.* Bologna, 1909.

BRUNI AUGUSTO. — *L'organizzazione razionale dell'economia e della finanza delle nazioni.* Roma, 1929.

BRUSA PIETRO. — *Sulle statistiche di mortalità negli Istituti di Assistenza all'infanzia.* « Maternità e Infanzia », anno IV, n. 5.

CABIATI ATTILIO. — *La finanza di Antonio De Viti De Marco.* « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica », novembre 1928.

ID. — *Scambi internazionali e Politica Bancaria in regime di moneta sana e avariata.* Torino, 1929.

ID. — *Da Versailles all'Aja - Il piano Young.* Torino, 1930.

ID. — *Prime linee per una teoria del « dumping ».* (A proposito dell'accordo siderurgico italo-tedesco). Da « Riforma Sociale ». Torino, 1913.

CACOPARDO MELITA. — *Accordi relativi al trasporto di effetti postali per via aerea.* Biblioteca del diritto aeronautico, Vol. IX.

CALENDARIO DEL R. OSSERVATORIO ASTRONOMICO DI ROMA SUL CAMPIDOGLIO. — Anno 1929.

CAMBONI LUIGI. — *Civiltà e Igiene del lavoro.* Sassari, 1911.

CAMMEO FEDERICO. — *Corso di Diritto Amministrativo.* Fasc. 28.

CANTELLI F. G. — *Sulle applicazioni del calcolo delle probabilità alla fisica molecolare*. Rovigo, 1920, « Metron », Vol. I, n. 1.

ID. — *Sulla deduzione delle leggi di frequenza da considerazioni di probabilità*. Ind. Grafiche It. Rovigo, 1921. « Metron », Vol. I, n. 3.

CAPITOLATO DEI PATTI DI BOARIA E BRACCIANTERIA. — Settembre 1911.

CASSA NAZIONALE ASSICURAZIONI INFORTUNI SUL LAVORO. — *Il contributo dell'Italia al V° Congresso Internazionale Medico per gli infortuni sul lavoro, e per le malattie professionali*. Vol. I, Roma, 1929.

ID. — *La Cassa nazionale infortuni e l'assistenza sanitaria agli infortunati*. Roma, 1929.

ID. — *La disoccupazione in Italia dal* 1919 *al* 1924, 1925, 1926.

CASSA DI RISPARMIO DELLE PROV. LOMBARDE. — *Bilancio consuntivo dell'anno* 1920. Milano, 1921.

CASTELNUOVO ARTURO. — *Unificazione tributaria*. « Echi e commenti », n.18, 1929.

CASTRILLI VINCENZO. — *Gli elementi della Statistica Intellettuale*. « Annali dell'Istituto di Statistica dell'Università di Bari », 1927-28, Vol. II.

CATASTO AGRARIO DEL REGNO. — *Compartimento del Lazio*.

CATTANEO CARLO. — *Alcuni scritti*. Vol. III. Milano, 1846.

CARANO DONVITO GIOVANNI. — *Degli effetti dell'ordinamento finanziario in genere e della pressione tributaria in ispecie nelle relazioni fra Stato e individuo*. Gioia del Colle, 1901.

ID. — *Lezioni di scienza delle finanze*. Palermo, 1926.

CAVAGLIERI GUIDO. — *La socializzazione del diritto e la servitù di passaggio e di appoggio*. Da « Rivista delle Comunicazioni », anno 1912, fasc. I.

CARTA DELLE DOGANE DEL REGNO D'ITALIA. — 1929.

CENI CARLO. — *L'azione della luce sulle muffe pellagrogene*. « Rivista sperimentale di Freniatica », Vol. XXXVI, fasc. I, 1910.

ID. — *Sulla periodicità dei penicilli verdi in rapporto colla pellagra*. 1909.

CEVIDALLI ATTILIO. — *Tendenze e conquiste dell'odierna medicina legale italiana*. Estr. da « Gazzetta Internazionale di Medicina », n. 51, 1912. Napoli.

CHESSA FEDERICO. — *Le condizioni economiche e sociali dei contadini dell'agro di Sassari*. 2 monografie di famiglia. « La riforma sociale », fasc. 1 e 4, Vol. XVI, 2ª serie, 1906.

ID. — *L'industria a domicilio*. Cagliari, 1910.

CHIODI CESARE. — *Aspetti demografici ed aspetti economici del piano regolatore di Milano*. Estr. da « Politecnico », n. 2, 1929. Milano.

CIAPETTI G. — *Studio tecnico per l'industria chimica. L'utilizzazione delle ligniti, delle sanse d'oliva, etc., nei gazogeni dei motori a gas*.

CIMATTI LEONE. — *Corso di orientamento professionale*. Biblioteca dell'« Enios », n. 8.

CITTÀ DI TORINO. — *L'Ufficio municipale del Lavoro nel suo primo anno di vita*. 1916.

CLARK OSCAR. — *La chimica, il freddo e la smalarina nella cura della malaria*. 1929.

CLUB ALPINO ITALIANO. — *Statuto*.

Colombini Pio. — *Relazione per la solenne inaugurazione degli studi.* Novembre 1911. Cagliari, 1912.

Le Colonie Italiane. — *Notiziario geografico economico.* Ministero delle Colonie, 1929.

Comitato Geografico Nazionale Italiano. — *Popolamento vegetale ed animale delle alte montagne.* Firenze, 1928. Istituto Geografico Militare.

Id. — *Saggio di un atlante del paesaggio italiano.* Milano, 1928.

Id. — *Sulla variazione dei climi.* Firenze, Comitato Geografico Militare. 1928.

Comitato per la mobilitazione civile. — *Il contributo delle maestranze femminili all'opera di allestimento di materiali bellici.* (1915-18).

Id. — *I comitati regionali di mobilitazione industriale.* (1915-1918).

Id. — *Le donne d'Italia nelle industrie di guerra.*

Comitato promotore del progetto di irrigazione dei terreni Destra Piave in Provincia di Treviso. — *Relazioni sul progetto. Documenti e Corografia.* Treviso, 1920.

Commissione di indagine sulle industrie. (Relazioni). 1922.

Comune di Milano. — *Annuario Storico Statistico.* 1924 e 1925.

Comune di Treviso. — *Il censimento generale della popolazione e delle industrie. Dicembre* 1921.

Comune di Venezia. — *Relazione al Bilancio di previsione dell'entrata e della spesa per l'esercizio finanziario* 1929.

Confederazione Generale Bancaria Fascista. — *Relazioni sulla attività svolta dalla sezione sindacale dal 1° gennaio* 1928 *al* 30 *giugno* 1929.

Confederazione Generale Enti Autarchici. — *Finanze Comunali.* « Annuario Statistico delle città italiane ». Roma, 1929.

Confederazione Generale Fascista dell'Industria Italiana. — *L'economia italiana in regime fascista.* 1929.

Id. — *Lo sviluppo dell'industria italiana.* Cartogrammi.

Id. — *Annuario* 1928-29.

Congresso internazionale dell'abitazione. — *Relazioni, prospetti e pubblicazioni varie.* Roma, 1929.

Congresso Internazionale d'Agricoltura. — *Note sull'agricoltura italiana dell'ultimo venticinquennio.* Roma, maggio 1927.

Congresso Internazionale dei Matematici. — *Argomenti delle comunicazioni. — Diario delle sedute nelle sezioni del congresso.* Settembre 1928.

Congresso Regionale dei Tecnici Agricoli. — *Relazioni.* Catanzaro, 17-18 gennaio 1926.

Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze e del Comitato nazionale scientifico tecnico per lo sviluppo e l'incremento dell'industria italiana. — *Programma provvisorio.* Milano e Torino, 27 aprile 1917.

Consiglio Provinciale dell'Economia di Bari. — *Movimento del commercio e della navigazione della Provincia di Bari.* 1927.

Consiglio Provinciale dell'Economia di Cagliari. — *Memoria al R. Governo sulla crisi attuale della Sardegna.* Cagliari, 1914.

Consiglio Provinciale dell'Economia di Genova. — *Censimento Industriale e Commerciale al* 15 *ottobre* 1927 *nella Provincia di Genova.*

Id. — *La consulta dei mercanti genovesi* (di Carlo Mioli 1805-1927).

CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI GENOVA. — *Relazione sull'andamento dell'attività economica della Provincia di Genova nell'anno* 1928.
ID. — *Relazione sulla Commissione Straordinaria.* Luglio 1926.
CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI LIVORNO. — *Il porto di Livorno nell'anno* 1928.
ID. — *L'economia della provincia di Livorno nel biennio* 1927-28.
CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI MILANO. — *Relazione sulla lotta contro l'urbanesimo.* 1929.
ID. — *Relazione sui risultati del censimento commerciale e industriale.* Milano, 1928.
ID. — *Catalogo della biblioteca.* Milano, 1929.
CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI SIRACUSA. — « *Siracusa* ». Monografia.
CONSIGLIO E UFFICIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI TARANTO. — *Movimento economico e sociale in terra jonica.* Taranto, 1928.
CONSIGLIO E UFFICIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI TERAMO. — *Catalogo esportatori e importatori.* 1929.
CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI TRIESTE. — *Statistica del commercio e della navigazione di Trieste per l'anno* 1928.
CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI VICENZA. — *L'attività economica della Provincia di Vicenza negli anni* 1927-28.
CONSORZIO PER L'INDUSTRIA E IL COMMERCIO DEI MARMI DI CARRARA. — 1928.
CONSORZIO OBBLIGATORIO PER L'INDUSTRIA SOLFIFERA SICILIANA. — *Conto consuntivo per l'esercizio* 1927-28.
IBIDEM 1928-29.
CONVEGNO NAZIONALE DI CHIMICA APPLICATA. — *Conclusioni della relazione del Prof. Nasini :* « *sulle riforme da introdursi nell'insegnamento della chimica* ». Milano, 2-5 aprile 1917.
LA COOPERAZIONE DI CONSUMO. — *Nella battaglia economica.* Dicembre 1926.
COEN CAGLI E. — *Il nuovo Porto di Venezia a Marghera* - Venezia, Istituto Veneto di Arti Grafiche.
CORONA GUIDO. *Guida di Cagliari.* Società Tipografica Sarda, 1915.
CORREGGIARI ANNIBALE. — *La prova dei fatti.* (Documenti statistici sulla diminuzione di informazioni ottenuta dal servizio di Sicurezza in una fabbrica). « Securitas », n. 11, 1929.
CORRIDORE FRANCESCO. — *Denunzie ritardate di nascite in Italia.* 1872-1909.
ID. — *Legislazione rurale nello Stato Pontificio.* Roma, 1910.
COSENTINI FRANCESCO. — *Giulio Salvatore Del Vecchio e la sua opera scientifica.* « Dizionario di Legislazione sociale », 1917, fasc. 5-6. Modena, 1918.
CREDITO FONDIARIO DELLA CASSA DI RISPARMIO DELLE PROVINCIE LOMBARDE IN MILANO. — *Bilancio consuntivo dell'anno* 1920. Anno LIII d'esercizio.
CREDITO ITALIANO. — *Notizie statistiche sulle principali società italiane per azioni.* 1912.
ID. — *Società italiane per azioni.* Notizie Statistiche, 1914.
CRESCINI VINCENZO. — *Gli orfani di guerra e la scuola.* Padova, 1919.
LA « CRITICA ». — *Indice dei primi VIII volumi.* Bari, Laterza, 1920.
D'ADDARIO RAFFAELE. — *L'azione selettiva della guerra in un gruppo di studenti universitari italiani.* « Archivio Scientifico », Vol. I e II, 1926-27 e 1927-28.

D'Addario Raffaele. — *Le equazioni normali relative al metodo dei minimi quadrati elementarmente determinate.* Bari, 1927.

Dallari Gino. — *Filosofia del diritto e scienza storica dell'incivilimento.* « Rivista Italiana di Sociologia », gennaio-febbraio 1913.

Dalla Vedova, Bertacchi, De Marchi, Errera, Ricchieri. — *Le riforme urgenti per la geografia nelle Università Italiane.* « Rivista di Geografia Italiana », fasc. VI, 1911.

Dalla Volta R. — *Legislazione sociale Fascista.* « La Nazione », 11 dicembre 1928.

Id. — *Alcuni aspetti dell'ordinamento bancario negli Stati Uniti.* « Rivista Bancaria », aprile-luglio 1928 e febbraio 1929.

De Finetti B. — *Sulle funzioni a incremento aleatorio* ». Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », Vol. X, serie 6ª, fasc. 3-4, agosto 1929.

Id. — *Sulle operazioni dell'analisi vettoriale che non dipendono dalle nozioni metriche.* « Atti della Pont. Accademia delle Scienze Nuovi Lincei », anno LXXXII, sessione VI del 19 maggio 1929.

Id. — *Sulle possibilità di valori eccezionali per una legge di incrementi aleatori.* « R. Accademia Nazionale dei Lincei », Vol. X, serie 6ª, fascicolo 7-8, 1929.

De Gleria. — *Un'abbreviazione nel calcolo della differenza media.* « Rivista Italiana di Statistica », anno I, n. 4, 1929.

De Gregorio Umberto Enrico. — *I reati in materia di leva commessi all'estero nel diritto penale italiano.* « Rivista militare italiana », 1917.

De Johannis M. J. — *Inchiesta sui futuri regimi doganali.* « L'economista ». Firenze.

Dell'Agnola. — *Intorno alle successioni di variabili casuali discontinue tendenti ad una variabile casuale limite.* Venezia, 1929.

Del Valle — *Il diagramma anulare quale indice climatico.* « Rivista del Touring Club », aprile 1929.

Del Vecchio Giorgio. — *Diritto di personalità umana nella storia del pensiero.* « Prolusione al corso di Filosofia del Diritto nell'Università di Ferrara ». Bologna, 1904.

Id. — *Il fenomeno della guerra e l'idea della pace.* Sassari, 1909.

Id. — *Il comunismo giuridico del Fichte. Nota critica.* « Rivista Italiana di Sociologia », anno IX, fasc. 1, 1905.

Id. — *L'etica evoluzionista. Nota critica.* « Rivista Italiana di Sociologia ».

Id. — *Le valli della morente italianità. « Il ladino » al bivio.* Dalla « Nuova Antologia », 1° novembre 1912.

Id. — *Per Guglielmo Oberdan e F. Rismondo.* Discorsi pronunciati nella R. Università di Roma il 14 luglio 1927.

Id. — *Una reformatio in pejus degli ordinamenti universitari.* Bologna 1919. Dalla « Rivista Universitaria Italiana », anno XVIII, n. 6-8.

Id. — *Sull'idea di una scienza del diritto universale comparato.* 2ª edizione con aggiunte. Torino, Fratelli Bocca, 1909.

De Luigi G. — *Emigrazione ed espansione coloniale.* Conferenza sulla storia d'Italia del secolo XIX svolta nell'anno acc. 1922-1923. Padova.

DE MARIA GIOVANNI. — *Studi sull'attività dell'imprenditore moderno.* Milano, « Vita e Pensiero », 1929.

DEL VECCHIO GUSTAVO. — *Per la previdenza popolare.* « La Libertà economica », n. 7, Bologna, 1911.

ID. — *Teoria dello sconto.* « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica », agosto 1914.

ID. — *Sulla teoria economica della crisi.* « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica », giugno 1914.

DI PALMA CASTIGLIONE. — *L'organizzazione internazionale del Lavoro e la XI sessione della Conferenza Internazionale del Lavoro.* « Nuova Antologia », 1928.

A. DE PIETRI TONELLI. — *Delle ragioni di una scienza della politica economica, del suo contenuto e del suo insegnamento.* R. Istituto Superiore di Commercio di Venezia, 1928-29.

ID. — *Le fonti internazionali della statistica commerciale* (Europa). « Metron », Vol. I, n. 3. Rovigo, 1921.

ID. — *Sulla determinazione delle variazioni quantitative delle trasformazioni economiche.* « Rivista di Politica Economica », anno XIX, 1929, fascicoli VII, VIII.

DE RUGGERI. — *Il problema della deduzione delle categorie.* Congresso Internazionale di Filosofia di Bologna, aprile 1911.

DE STEFANI ALBERTO. — *Discorso su Angelo Messedaglia.* « Atti dell'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Venezia », serie V^a^, Vol. XIII.

DETTORI GIOVANNI. — *Il credito agrario in Sardegna,* 1909.

ID. — *Il monopolio statale dell'industria delle Assicurazioni sulla vita in Italia.* « Contributo allo studio delle basi di sviluppo di un fenomeno finanziario ». Cagliari, 1911.

ID. — *La malaria in Sardegna.* Cagliari, 1911.

DE VERGOTTINI MARIO. — *Lezioni di statistica demografica ed economica.* Anno accademico 1928-29.

DIREZIONE DELLE OPERE PIE DI S. PAOLO. — *Conto consuntivo.* Anno 1895.

ID. — *Conti consuntivi — Monte di Pietà — Credito Fondiario — Educatorio Duchessa Isabella — Ufficio Pio.* Anno 1900.

DI VESTEA. — *Alcuni studi sulla pioggia obliqua nel cimitero monumentale di Pisa in rapporto col deterioramento di celebri affreschi.* Pisa, 1916.

DONATI BENVENUTO. — *Dottrina pitagorica e aristotelica della giustizia.* Modena, Formigini.

ID. — *Il rispetto della legge dinanzi al principio di autorità — Critica alla filosofia di Hobles.* « Atheneum ». Roma, 1919.

ID. — *Il valore della guerra e la filosofia di Eraclito.* Genova.

DRIESSEN H. C. — *Malaria.* Roma, 1929.

DUCCESCHI V. — *La Soja e l'alimentazione nazionale.* Milano, 1928.

EINAUDI LUIGI. — *A proposito della Tripolitania.* (Considerazioni economiche e finanziarie). « La Riforma sociale », fasc. 7, 1911.

ID. — *Contributo alla ricerca dell'ottima imposta.* Milano, 1929.

ID. — *I fasti italiani degli aspiranti trivellatori della Tripolitania.* « La Riforma sociale », marzo 1912, fasc. 3.

ENIOS. — *Bibliografia italiana di organizzazione del lavoro.* Giugno 1928.

ID. — *Einstein e il Sionismo.*

GIOVANNI EMANUELE ELIA. — *L'Unione Internazionale di soccorso e la Società di Geografia.* « Nuova Antologia », settembre 1928.

ENCICLOPEDIA ITALIANA (Réclame).

ENRIQUES FEDERICO. — *Esiste un sistema filosofico di Benedetto Croce?* « Rassegna contemporanea », anno IV, n. 6.

ID. — *La teoria dello Stato e il sistema rappresentativo.* « Scientia », Vol. VI, anno III, 1909. Bologna.

ID. — *Notizie.* « Rivista di Filosofia », anno IV, fasc. II.

ENRIQUES PAOLO. — *Notizie su un Vorticellide raro e sulla sua coniugazione.* Bologna, 1912.

ID. — *Sul pigmento nel sistema nervoso degli invertebrati e le sue modificazioni sperimentali.* Formíggini, 1913.

ID. — *Sull'insegnamento delle scienze naturali nelle scuole secondarie.* Pavia, 1910.

ID. — *La coniugazione e il differenziamento sessuale negli infusori.* Bologna 1910.

ID. — *La memoria e la pedagogia.* Da « Psiche », anno III, n. 2 aprile-giugno, 1914.

ENRIQUES e M. GORTANI. — *La successione degli strati e la teoria dei periodi geologici.* « Scientia », Vol. VI, n. XII-4.

ENTE NAZIONALE INDUSTRIE TURISTICHE. — *L'insegnamento del golf.* Parigi 1929.

ID. — *Relazione sull'attività svolta nell'anno* 1928.

ID. — *Riviera di Levante, Riviera di Ponente, Palermo, Taormina, Lucca, Volterra, Parma, S. Gimignano, Perugia, Siracusa.*

ID. — *Visioni d'Italia.* Roma, 1930.

FANNO MARCO. — *Contributo alla teoria dell'offerta a costi congiunti.* (Suppl. al Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica, ottobre 1914).

ID. — *La funzione dei riporti nelle operazioni di borsa.* Genova, 1907.

ID. — *L'evoluzione delle banche di emissione.* Estr. di « Rivista Ligure di Scienze, Lettere ed Arti ». Genova, 1908.

FANO GUIDO. — *Intermezzo Palestinese.* « Nuova Antologia », 1° febbraio 1929.

FANTINI ODDONE. — *I diritti del lavoro.* Milano, 1929.

ID. — *Cooperazione e legislazione sociale in regime fascista.*

FASOLIS GIOVANNI. — *Lo stato liberale e lo stato fascista.*

ID. — *Enciclopedia italiana.*

FAURE GABRIEL. — *Ore d'Italia.* Bari, 1928, Società Editrice Tipografica.

FAVARO G. A. — *Declinazione di 720 stelle di riferimento per il catalogo astrografico di Catania, osservate a Torino nel* 1913. « Memoria della Società degli Spettroscopisti Italiani », Vol. VIII, serie II, 1919.

ID. — *Sulla distribuzione degli errori di chiusura fra i gruppi di coppie stellari osservate nelle stazioni atmosferiche internazionali di latitudine.* Kiel, 1913.

FAZIO EMILIO. — *Lo sviluppo della popolazione in Calabria.* Cosenza, 1928.

FEDERAZIONE ITALIANA DEI CONSORZI AGRARI. — *Assemblea generale ordinaria dei Soci,* 19 marzo 1929.

FERRARIO. — *I problemi attuali della produzione serica.* Estr. dagli « Atti del Consiglio Superiore dell'Economia Nazionale ». Roma, 1929.

FERROGLIO G. — *Del metodo dell'insegnamento della Statistica.* Estr. da « Rivista Italiana di Sociologia ». Roma, 1910, gennaio-febbraio 1910.

FIOCCO GIUSEPPE. — *La pittura veneziana alla mostra del settecento.* « Rivista della città di Venezia », 1929, n. 8-9.

FIORANI-GALLOTTA. — *Alcoolismo.* « Trattato Italiano d'Igiene », parte 6ª, fasc. 3°.

FLORA FEDERICO. — *Il Bilancio delle Ferrovie dello Stato nell'anno finanziario* 1927-28. « Rivista Bancaria », 1° gennaio 1929.

FOÀ BRUNO. — *Di alcune influenze del tempo sul valore.* Milano, 1928.

ID. — *Influenze monetarie sulla distribuzione delle ricchezze.* « *La inflazione* ». 1927.

FOLDES BELA. — *Luigi Bodio.* Allgemeines Statistisches Archiv. Jena, 1928.

FORTI UGO. — *Il diritto internazionale dopo la guerra.* Da « Giurisprudenza italiana », Vol. LXXII, disp. 8-9 e 11. Torino, 1920.

FOSSATI ERALDO. — *La sorgente del salario nel suo svolgimento dottrinale.* « Collana di Scienze Politiche, Pietro Vaccari », serie C. Vol. II, 1928, Pavia.

FRACCACRETA A. — *Sulla economia del mezzogiorno d'Italia.* (*Dall'ultimo periodo borbonico alle condizioni presenti*). « Annali del Seminario Giuridico Economico della R. Università di Bari », anno II, fasc. II. Bari, 1928.

FRACCARO PLINIO. — *Studi sull'età dei Gracchi.* Fasc. I. Città di Castello, 1914.

FRISELLA VELLA GIUSEPPE. — *Temi e problemi sulla così detta questione meridionale e bibliografia,* Palermo, 1928.

FUBINI RENZO. — *Giuseppe Prato e la sua opera scientifica.* Estr. « Rivista Bancaria », n. 9, 1928.

ID. — *Note in tema di segreto bancario.* « Rivista bancaria 1929 ».

ID. — *Sull'influenza dell'imposta sulla domanda e sull'offerta.* Città di Castello, 1929.

FUMAGALLI G. — *L'esposizione internazionale della stampa a Colonia.* « Accademie e Biblioteche », n. 2, anno II.

GABBA CARLO FRANCESCO. — *Il nuovo diritto internazionale e l'intolleranza scientifica di una Commissione presieduta da Carlo Francesco Gabba.* Roma, 1910.

GALANTE ANDREA. — *Per la conoscenza all'estero dell'opera scientifica italiana.* « Intesa intellettuale », anno II, 1919, fasc. 2. Bologna.

GALVANI LUIGI. — *Le comete.* Lettura di volgarizzazione tenuta la sera del 18 maggio 1910 nell'Istituto Galileo Galilei in Roma.

GARDENGHI GIUSEPPE. — *Profilassi generale delle malattie trasmissibili.* « Trattato Italiano di Igiene, diretto dal prof. Oddo Casagrandi ».

GARIBOLDI MINETOLA ALESSANDRINA. — *Studio statistico sulla popolazione scolastisca del R. Istituto Magistrale di Grosseto.* 1888-1927.

GENCO B. A. — *La proprietà edilizia nei suoi problemi e nella sua organizzazione.* Mondadori, Verona, 1929.

GENIO. (Comando della 3ª Armata). — *Compiti dell'Ufficiale di presidio nei lavori di restauro delle terre devastate dalla guerra.* 1918.

GHIRON MARIO. — *Studi sull'andamento della facoltà giuridica.* « Athenaeum ». 1913.

GIANFERRARI LUISA. — *Lezioni di Biologia Generale.* R. Università di Milano, Facoltà di Medicina, 1930.

GIANNINI AMEDEO. — I. *Convenzione di Parigi.*

ID. — II. *La legislazione aeronautica italiana.*

ID. — IV. *Ibidem.*

ID. — VI. *Ibidem.*

ID. — VIII. *Ibidem.*

ID. — VII. *La convenzione iberico-americana per la navigazione aerea.* « Biblioteca di diritto aeronautico ». Roma, 1928.

GIANNINI CESARE. — *La statistica degli infortuni in Italia.* « Le Assicurazioni sociali », Vol. I, luglio-agosto 1925.

GIANNINI DOMENICO. — III. *L'organizzazione della R. Aeronautica.*

ID. — V. *Ordinamenti amministrativi dell'aeronautica civile.* « Biblioteca di diritto aeronautico », Roma, 1928.

GINI CORRADO. — *Disoccupazione e sovrapopolazione.* « Gerarchia », n. 10, ottobre 1928.

ID. — *Intorno alla portata e agli effetti delle false denuncie di nascita per i nati denunciati al primo dell'anno.* « Istituto Int. di Statistica ». Varsavia, 1929.

ID. — *Sull'aumento di mortalità determinato dalla guerra.* « Sociologia », fascicolo V-VI, anno XX.

GIORDANO RENATO. — *Esperimento della immuno-metallo-terapia nella campagna antimalarica 1927 nelle bonifiche dell'O.N.C.*, 1928.

GINI GINO. — *La scheda sanitaria personale obbligatoria in Italia.* Studio di progetto.

GIOVENE ACHILLE. « *Causa estranea* » *e responsabilità contrattuale per fatto altrui.* « Annali del Seminario Giuridico Economico di Bari », anno II, fasc. II.

GIULIANI SANDRO. — *Assestamento e rinascita dell'Albania.* « Popolo d'Italia », Milano, 1929.

GIUSTI UGO. — *Lo sviluppo dell'industria italiana fra il 1911 e il 1927.* Roma, 1928.

GOVERNATORATO DI ROMA. — *Un ventennio di attività edilizia a Roma* (1990-1919).

GRAZIADEI ANTONIO. — *Discorso sul bilancio del tesoro.* Roma, 1913.

GRILLI GIUSEPPE. — *Il trattamento fiscale delle assicurazioni.* « Rivista di Finanza Moderna », anno 1928, n. 9-10.

GRIZIOTTI BENVENUTO. — *Le imposte sugli incrementi di valore nei capitali e sulle rendite nei redditi.* Caserta, 1912.

ID. — *Principî di politica, diritto e scienza delle finanze.* Padova, 1929.

ID. — *Studio sui sistemi personali e reali d'imposta e sulla deduzione dei debiti nei sistemi tributari.* Roma, 1912.

GUARNIERI EMILIO. — *La crisi della sericoltura italiana. Mali e rimedi.* Milano, 1928.

GUMPLOWITZ L. — *La sociologia e il suo compito.* Estr. da « Rivista Italiana di sociologia », maggio-giugno 1908.

Il Diritto dei Pubblici appalti delle concessioni amministrative e dell'acque pubbliche (circolare-programma). Roma, 1917.

INSOLERA FILADELFO. — *Genesi, vagiti e metamorfosi dell'Istituto Italiano degli Attuari.* « Giornale di Matematica Finanziaria ».

ID. — *Per la tavola di mortalità degli assicurati italiani.* « Atti del I Congresso Nazionale di Scienza delle Assicurazioni » Torino, 20-23 settembre 1928.

ID. — *Sul calcolo della probabilità annuale di morte dei gruppi aperti di popolazione.* « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », Vol. LXII, 1927.

ID. — *Sulla disciplina scientifica e professionale dell'attuario.* « Atti del I Congresso Nazionale di Scienza delle Assicurazioni ». Torino, 20-23 settembre 1928.

ID. — *Sull'assicurazione del credito in agricoltura.* « Giornale di Matematica finanziaria », fasc. 1° e 2°, 1928.

ID. — *Su particolari equazioni di Volterra e loro applicazione finanziaria e demografica.* Milano, 1927.

I PROBLEMI DEL PORTIERATO. — *Dalle origini alla stipulazione del contratto nazionale.* « Federazione Naz. Fasc. della Proprietà Edilizia ». Pubblicazione n. 7.

ISTITUTO EDITORIALE ITALIANO. — *Catalogo generale dei periodici pubblicati dall'Istituto.* 1928.

ISTITUTO NAZIONALE DELLE ASSICURAZIONI. — *Relazione del Consiglio di Amministrazione.* Bilancio 1928.

ISTITUTO NAZIONALE DI ECONOMIA AGRARIA. — *Annali dell'Osservatorio di Economia agraria di Bologna.* Piacenza, 1928.

ID. — *Rapporti fra proprietà, impresa e mano d'opera nell'agricoltura italiana.* 1929. Calabria.

ISTITUTO NAZIONALE PER L'ESPORTAZIONE. — *Relazione sull'attività dell'I.N.E.* 31 maggio 1929.

ISTITUTO CENTRALE DI STATISTICA DEL REGNO. — *Elenco nosologico adottato per la statistica delle cause di morte* (1924).

I MERCANTI DI CREMONA. — *Cenni storici sulla loro organizzazione.* 1183-1260-1927.

ISTITUTO NAZIONALE SVIZZERO DI ASSICURAZIONE CONTRO GLI INFORTUNI. — *Relazione annuale e conti del* 1927.

ISTITUTO DELLE OPERE PIE DI S. PAOLO IN TORINO — BENEFICENZA E CREDITO. — *Conto consuntivo del credito fondiario per l'esercizio* 1907. Torino, 1928.

R. ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI. — *Parole dette il 24 novembre* 1929 *dopo l'accettazione del premio « Giulietta Forti » dal dr. Achille Forti.* 1849-1929.

ITALIA E DALMAZIA. — *Ai professori, agli studenti ed ai mutilati di guerra.* Pisa, 1918.

ISNARDI ETTORE. — *La tubercolosi in Italia dal* 1887 *al* 1923. Livorno, 1928.

JACONIANNI LUCA. — *La fata morgana nella mente.* Parte I dell'opuscolo II. Contraddizione intellettiva e morale. Roma, 1902.

JAMITTI PIROMALLO ALFREDO. — *Il casellario giudiziale, per l'attuazione del nuovo codice penale.* Riforme urgenti. Roma, 1928.

JENSEN W. — *La battaglia della malaria in Italia.* 1928.

LANTINI L. — *La funzione commerciale nella economia dello Stato fascista.* « Atti del Consiglio Superiore dell'Economia Nazionale ». Roma, 1929.

LA REVISIONE DEL TRATTATO DEL TRIANON. — Vol. I, II, III. Budapest, 1928.

LATTES LEONE. — *Gruppi sanguigni ed ereditarietà.* — 2° Congresso di genetica. Roma, 1929.

LASORSA GIOVANNI. — *Indagini sulla mortalità delle società per azioni.* « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica », ottobre 1928.

ID. — *La mortalità dei centenari.* « Rivista Italiana di Statistica », gennaio 1929.

ID. — *Lezioni su le organizzazioni e le fonti della Statistica demografica ed economica.* Padova, 1929.

Lavori del Laboratorio di fisiologia sperimentale della R. Scuola superiore di Medicina Veterinaria di Milano. Vol IV, Milano 1920 e 1914.

LAZZARINI VITTORIO. — *Antiche leggi venete intorno ai proprietari nella terraferma.* Venezia, 1920.

LEGGE E REGOLAMENTO PER GLI INFORTUNI DEGLI OPERAI SUL LAVORO. Milano, 1898.

LIVI LIVIO. — *Gli ebrei alla luce della statistica. Caratteristiche antropologiche e patologiche ed individualità etnica.* Libreria della Voce. Firenze.

ID. — *Gli ebrei alla luce della statistica. Evoluzione demografica, economica e sociale.* Vallecchi, editore, Firenze.

ID. — *Memoria e profitto nei ragazzi.* « Metron », Vol. I, n. 2.

LIVI RODOLFO. — *Cronachetta pratese del '500.* « Archivio storico pratese ». Anno II, ottobre 1919, n. IV.

ID. — *Guido da Bagnolo medico del Re di Cipro* (con nuovi documenti). Modena, 1916.

LOLINI ETTORE. — *Il mercato di borsa e gli indici della speculazione in Italia.* « Commercio », luglio 1929, n. 7.

ID. — *Per l'attuazione dello stato fascista.* Firenze, Vol. I.

LORENZONI GIOVANNI. — *Introduzione e guida ad un'inchiesta sulla piccola proprietà coltivatrice post-bellica in Italia.* Roma, 1929.

LOSACCO MICHELE. — *È possibile una filosofia della natura?* « II Congresso Int. di Filosofia », Bologna, aprile 1911.

LUME GIOVANNI. — *La riforma monetaria fascista.* Libreria del Littorio, 1928.

LUTRARIO. — *L'opera del Comitato di Igiene della S. d. N. nella lotta antimalarica.* « Scuola di Malariologia », 1928.

LUZZATTI LUIGI. — *I martiri nella storia del pensiero.* « Atti del 3° Congresso della Società Filosofica Italiana ». Roma, 27-31 ottobre 1909.

ID. — *Di Giorgio Politeo e dei suoi lavori scientifici.* « Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti ». Anno accademico 1915-16, tomo LXXV, parte prima.

ID. — *Sul bilancio dell'interno per l'esercizio* 1910-11. Discorsi pronunziati nelle tornate del 22 e 23 giugno 1910. Senato del Regno, 1910. Roma.

ID. — *Solennità per il cinquantenario della Banca Popolare di Novara.* « Nuova Antologia », aprile 1922.

D. — *Sulla riforma del Senato* (discorso tenuto il 6-5-910 al Senato del Regno).

LUZZATTI LUIGI. — *Sul programma del Governo* (discorsi). Roma, 1910.
ID. — *Sulle convenzioni marittime provvisorie* (discorso). Roma, 1910.
LUZZATTO-FEGIZ PIERPAOLO. — *La popolazione di Trieste.* Istituto statistico-economico. Trieste, 1929.
LUGLI AURELIO. — *Sulla variazione media della temperatura in Italia con la latitudine ed altezza.* « Annali di Meteorologia », parte 1ª, 1882-1883.
MAGNI ETTORE. — *Repertorio Generale Tributario dell'A. VII dell'E. F.* Livorno, 1929.
ID. — *Supplemento al repertorio per l'anno VIII.* Catania, 1929.
MAGRINI ROMANO. — *Fino a che punto e entro quali limiti, senza frustrare gli scopi e le ragioni della loro esistenza, le Casse di Risparmio possono funzionare da Istituti Bancari.* Milano, ottobre 1924.
MAJO ESTER. — *Andamenti normali di Napoli relativi al periodo* 1880-1926.
ID. — *Alcune misure di radioattività dell'aria a Napoli-dintorni e nel Golfo.* Estr. da « Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli », Vol. XXXVIII, anno XL, 1926.
ID. — *L'altezza delle onde del mare nel Golfo di Napoli.* 1928.
ID. — *Composti azotati disciolti nella pioggia a Portici.* « La meteorologia pratica », anno VIII, n. 3, 1927.
ID. — *Contributo allo studio delle relazioni tra i microcosmi e gli elementi meteorici.* « Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli », Vol. XXXVIII, serie II ; Vol. XVIII, anno XL, 1926.
ID. — *Gli aloni solari.* « Rivista di fisica, matematica e scienze naturali », Vol. 2°, luglio 1928.
ID. — *I fenomeni vulcanici della Grotta del Cane in rapporto alle variazioni atmosferiche.* « Bulletin Volcanologique », n. 11-12, 1927.
ID. — *Influenza della tensione elastica sulla forza elettromotrice termoelettrica.* Napoli, 1923.
ID. — *I risultati di un triennio di osservazioni pireliometriche a Napoli.* Mondovì, 1928.
ID. — *La pioggia a Napoli dal* 1865 *al* 1924. Napoli, 1926.
ID. — *La pioggia a Napoli e le sue variazioni nel periodo* 1895-1924. « Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli », Vol. XXXVIII, anno 1926.
ID. — *La radioattività dell'aria in rapporto agli elementi meteorici.* « La meteorologia pratica », anno IX, 1928, n. 2.
ID. — *Le massime piogge nel Matese.* « Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali », giugno 1927.
ID. — *L'evaporazione del suolo a Portici.* « La meteorologia pratica », anno IX, 1928, n. 1.
ID. — *Le variazioni di regime del Tevere a Ripetta.* « Il monitore tecnico », anno 34, maggio 1928.
ID. — *Misure pireliometriche eseguite a Napoli nel* 1907. Napoli, 1927.
ID. — *Osservazioni sismiche dell'anno* 1922.
ID. — *Processi di corrosione del ferro e degli acciai.* « Il monitore tecnico », anno XXXIII, Vol. n. VIII, 30-4-1927.
ID. — *Ricerca delle variazioni periodiche e delle ricorrenze secolari nel clima di Napoli.* « La meteorologia pratica », anno IX, n. 4, 1928.

MAJO ESTER. — *Studio comparativo sulla variazione della quantità e della frequenza annuale delle pioggie in varie città d'Italia.*

ID. — *Sulla temperatura del suolo a Portici.* « La meteorologia pratica », anno VIII, n. 4, 1927.

ID. — *Sulla durata dello splendore del sole a Portici.* « La meteorologia pratica », anno IX, n. 5-6, 1928.

ID. — *Sulle variazioni di lungo periodo nella frequenza annuale delle piogge a Padova e a Bologna.* « La meteorologia pratica », anno VIII, n. 5, 1927.

ID. — *Sulle variazioni di lungo periodo nella quantità e nella frequenza annuale della pioggia a Roma.* « La meteorologia pratica », anno VIII, n. 5, 1927.

ID. — *Sulle variazioni della rifrazione atmosferica nel golfo di Napoli.* « Rivista marittima », giugno 1927.

ID. — *Sul periodo diurno della pioggia a Napoli.* « Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli », Vol. XXXIX, serie II, Vol. XIX, 1927.

ID. — *Variazione periodica nella escursione annua della temperatura a Roma.*

MAJORANA SALVATORE. — *I costi marginali e la traslazione delle imposte sul reddito.* Catania, 1928.

ID. — *La carta moneta.* Roma, 1928.

ID. — *Legge del valore — Grado finale di utilità — Costo di produzione.* Roma, 1928.

ID. — *L'imposta del reddito agrario e le sue soluzioni.* « Lezione tenuta nella R. Università di Roma », maggio 1928. Catania, 1928.

ID. — *Uno storico duello — Antonio Scialoja ed Augusto Magliani.* « Nuova Antologia ». Roma.

MALINVERNI REMO. — *La rilevazione dei costi.* E.N.I.O.S., serie B, n. 6, 1928.

MANCINELLI ENRICO. — *Manuale di Statistica comunale.* Empoli, 1929.

MARCELLI GIULIO. — *La questione agraria meridionale.* « Rivista Italiana di Sociologia ». Roma, 1911.

MARCHESINI GIOVANNI. — *La rieducazione della coscienza.* Venezia, 1920.

MARCHETTI DANIELE. *La valutazione fisica della gioventù d'ambo i sessi.* Bologna, 1922.

MARIOTTI A. — *Le assicurazioni turistiche.* « Atti dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni ». Roma, 1929.

ID. — *Lezioni di economia turistica.* Anno 1927-28, puntata 2ª.

MAROI LANFRANCO. — *La città italiana.* Discorso tenuto il 14 novembre 1926 presso l'Università di Macerata per l'inaugurazione dell'Anno accademico 1926-27. Macerata, 1927.

ID. — *I fattori demografici del conflitto europeo.* Roma, Athenaeum, 1918.

ID. — *Le rilevazioni statistiche in sussidio dell'urbanistica.* « Annali dell'Università di Macerata », Vol. II.

ID. — *Movimenti della popolazione romana nell'interno della città.* « Capitolium », ottobre 1928.

MARTINI CORNELIO. — *Alcuni aspetti dell'economia bresciana.* « L'economia bresciana », 1927.

ID. — *In margine al censimento industriale e commerciale.* « Il popolo di Brescia », 7, 14, 20 luglio 1928.

ID. — *La rinascita della statistica.* « Commercio Bresciano », 3 ottobre 1928.

MARTINI MARIO. — *Malattia, ferita, morte del marinaio nella legislazione comparata.* Cagliari, 1910.

MAURO F., FIORENTINI. — *L'automobilismo nell'elettrotrazione e l'elettrificazione della ferrovia Porto San Giorgio-Fermo-Amendola.* Milano, 1928.

MAURO FRANCESCO. — *Le osservazioni di un ingegnere negli Stati Uniti d'America.* E.N.I.O.S., serie I, n. 5, 1928.

MAYMONE e C. SIRCANA. — *Le variazioni normali del peso vivo nei bovini.* Roma, 1929.

MAZZONI LAMBERTO. — *Il comune di Castelfiorentino ed il suo movimento demografico dal* 1866 *al* 1926. Castelfiorentino, 1927.

MEDOLAGHI P. — *La previsione statistica ed il calcolo delle probabilità.* Rovigo, 1920. « Metron », Vol. I, n. 2.

MELIS ANTONIO. — *Guida generale amministrativa giudiziaria politica e delle comunicazioni dei comuni e frazioni di comuni del Regno d'Italia.*

MERENDA PIETRO. — *Correzione del rapporto fra stipendi e pensioni contrattuali degli impiegati dello stato e stipendi e pensioni pagate in depresse lire carta.* « Bollettino della Società delle Scienze Naturali ed Economiche di Palermo », Vol. XI, 1929.

MERIMÉE PROSPERO. — *Colomba.* Milano, 1928.

MESSEA ALESSANDRO. — *Conferenza tenuta nell'aula magna della R. Università di Torino il* 27 *settembre* 1928.

MICHELS ROBERTO. — *Il coefficiente psicologico dell'Economia Politica.* « La Riforma sociale », n. 9-10, 1928.

ID. — *Insalata russa nella politica italiana.* « Rivista popolare », 15 dicembre 1909.

MILLOSEVICH FEDERICO. — *Discorso pronunciato per l'inaugurazione dell'anno accademico* 1929-30. Pallotta, 1929, Roma.

MILONE J. — *Il grano, le condizioni geografiche della produzione.* Bari, Laterza, 1929.

MINELLA MARIO. — « *Plebiscito* ». Estr. da « Bollettino mensile della Società Reale Mutua di Assicurazioni », n. 1-2, 1928.

MINISTERO DELL'AERONAUTICA. — *Statistica delle linee aeree civili italiane.* Anno 1926, anno 1927, anno 1928.

MINISTERO DI AGRICOLTURA E FORESTE. — *Compendio dei dati principali della statistica ufficiale del Regno per gli anni dal* 1861 *in poi.* Roma, 1886.

ID. — *Il frumento in Italia — Produzione, consumo, prezzi.* « Supplemento alle notizie periodiche di statistica agraria ». Roma, 1914.

ID. — *Movimento degli infermi negli ospedali civili del Regno.* Anno 1883.

ID. — *Statistica degli scioperi avvenuti in Italia.* Roma, 1912.

MINISTERO DELLE COMUNICAZIONI. — *La marina mercantile italiana al* 31 *dicembre* 1926. Relazione. Roma, 1929.

ID. — *Le abitazioni per il personale delle Ferrovie dello Stato.* Roma, 1929.

ID. — *Notizie riassuntive sui risultati dell'esercizio nell'anno finanziario* 1927-28. Roma, 1929.

ID. — *La marina mercantile italiana al* 31 *dicembre* 1926. Relazione.

ID. — *Azienda di stato per i servizi telefonici : relazione per l'esercizio finanziario* 1928-29.

MINISTERO DELLE COMUNICAZIONI. — *Amministrazione delle FF. SS.: Relazione per l'anno finanziario* 1927-28. *Ibidem : Relazione per l'anno* 1928-29.
ID. — *Direzione Generale delle Poste e dei Telegrafi : Relazione per l'anno finanziario* 1927-28.
ID. — *Direzione Generale delle Poste e dei Telegrafi : Relazione per l'anno finanziario* 1928-29.
ID. — *Traffico merci diviso per stazioni. Anno* 1927-28.
ID. — *Traffico viaggiatori diviso per stazioni. Anno* 1927.
MINISTERO DELLE CORPORAZIONI. — *I trattati di commercio fra l'Italia e gli altri Stati*. Vol. III A-Z.
ID. — *Relazione sul servizio minerario nell'anno* 1928. Parte prima.
MINISTERO DELL'ECONOMIA NAZIONALE. — *Annuario per le industrie chimiche e farmaceutiche. Anno* 1927.
ID. — *Atti del Consiglio Superiore dell'Economia Nazionale. Sessione VII*, dicembre 1927. Sessione VIII, gennaio 1929.
ID. — *Gli Istituti e le imprese di assicurazione privata in Italia* 1928-29.
ID. — *Note illustrative della Carta Geologica Italiana*. Roma, 1929.
ID. — *Relazione Marescalchi : Sulla utilizzazione dei sottoprodotti della vinificazione.*
ID. — *Relazione Pavoncelli : La difesa e l'incremento della produzione olearia italiana.*
ID. — *Relazione Boccadifuoco : I contratti tipo.*
ID. — *Relazione sul funzionamento dei servizi e sull'attività svolta dall'Istituto nel 5° anno di esercizio* 1927. (Casellario Centrale Infortuni). Roma, 1928.
IBIDEM : *VI anno di esercizio*. Roma, 1929.
MINISTERO DELLE FINANZE. — *Direzione Generale delle Dogane ed Imposte indirette : Carta delle Dogane del Regno d'Italia*. 1929. Scala 1: 1.000.000. (Istituto Geografico Militare, Firenze).
ID. — *La coltivazione del tabacco*. Roma, 1906.
ID. — *Le tasse nell'esercizio finanziario* 1926-27 *per regioni e per provincie*. « Bollettino di Statistica e di Legislazione comparata », 1927.
ID. — *Il Gran Canale Cavour. Relazione*. Roma, 1928.
ID. — *Movimento commerciale del Regno d'Italia nell'anno* 1924. Parte II, Vol. II. Movimento per paesi di provenienza e di destinazione (paesi extra-europei). Roma, 1928.
ID. — *Movimento commerciale del Regno nel* 1926.
ID. — *Movimento della Navigazione del Regno d'Italia nell'anno* 1925. *Ibidem :* 1926.
ID. — *Pubblicazioni edite dallo Stato e col suo concorso. Spoglio dei periodici e delle opere collettive* 1901-1925. Parte 2ª.
ID. — *Relazione dimostrativa dello stato e dell'andamento dei lavori catastali dal 1° luglio* 1927 *al* 30 *giugno* 1928.
ID. — *Relazione sulla amministrazione delle dogane e imposte indirette dal* 1914-15 *al* 1926-27.
MINISTERO DELLA GIUSTIZIA. — *Statistica delle carceri* 1924-25.
ID. — *Statistica della criminalità per l'anno* 1921.
ID. — *Statistica Giudiziaria Civile e Commerciale per gli anni* 1923 *e* 1924.
ID. — *Statistica dei Riformatori*. Anni 1924-1925.

MINISTERO DELLA GUERRA. — *Della leva di terra sui giovani nati nell'anno* 1898.
ID. — *Istruzioni intorno agli atti di morte, agli atti di nascita ed ai testamenti in guerra.* Voghera, 1916.
ID. — *I servizi logistici* (Prof. Fulvio Zugaro e R. Ratiglia).
ID. — *Norme per le rilevazioni di Statistica Sanitaria di guerra, dicembre* 1917. Roma.
MINISTERO DELL'INTERNO. — *Direzione Generale della Sanità Pubblica: «La tubercolosi» scienza e legge nella lotta contro la tubercolosi attraverso il tempo nei diversi paesi.* Vol. 1, 2, 3, 4. 1928, Roma.
ID. — *Testo unico della legge elettorale politica.* Roma, 1928.
MINISTERO DEI LL.PP. — *I caratteri della disoccupazione operaia in Italia* (Dr. Ernesto Campese). Roma, 1928.
ID. — *Comitato permanente per le migrazioni interne: Le migrazioni interne in Italia. Dati statistici.*
ID. — *La produzione di energia elettrica in Italia nell'anno* 1924.
ID. — *Le opere pubbliche al* 31 *dicembre* 1927. — *Le opere pubbliche al* 31 *dicembre* 1928. — *Le opere pubbliche al* 30 *giugno* 1928.
ID. — *Livellazioni di precisione per il rilievo altimetrico dei corsi d'acqua.* Roma 1928.
ID. — *Notizie sull'attività dei servizi.* Roma 1926.
ID. — *Pubblicazioni del servizio idrografico italiano.* Roma 1926.
MINISTERO PER LE TERRE LIBERATE. — *Ufficio censimento: Censimento dei profughi di guerra.* Ottobre 1918.
MINNITI MICHELE. — *Le cause delle crisi industriali post-belliche e l'equilibrio internazionale.*
MIRALDI GIOVANNI. — *Autolesionismo e simulazione nel campo degli infortuni sul lavoro.* Roma, 1929.
MOCHI Prof. ALESSANDRO. — *Istruzioni impartite nel corso di Antropometria tenuto a* 20 *ufficiali medici dell'esercito, della marina e dell'aeronautica.* Firenze, 1928.
MODENA GUSTAVO. — *L'assistenza dei malati di mente nella provincia di Ancona.* 1929.
MINISTERO DELLA MARINA. — *Direzione Generale del Personale e dei Servizi Militari:* Relazione sulla leva marittima dei nati nell'anno 1906. Roma, 1928.
MONTI GENNARO MARIA. — *Le origini della Gran Corte della Vicaria e le codificazioni dei suoi riti.* «Annali del Seminario Giuridico Economico». Bari, anno II, fasc. II.
MONTECCHI LEO. — *Nemi, il suo lago le sue navi.* Roma, 1929.
MORSELLI GIOVANNI. — *Rinnovamento chimico italiano.* Convegno Interna zionale di Clinica applicata. Milano, 3-4-5 aprile 1917.
MORSELLI EMANUELE. — *La legislazione sui contributi sindacali.* «Diritto, Economia e Commercio», fasc. 3-4.
MORTARA GIORGIO. — *Prospettive economiche.* Volume completo. 1929. IBIDEM 1930.
MUNERATI O. — *Dal seme al seme in esclusiva luce artificiale.* Venezia 1924.
ID. — *Il frazionamento degli individui nelle ricerche di genetica.* «Rassegna Int. di Agronomia», Vol. II, gennaio-marzo 1924, n. 1.

MUSATTI EUGENIO. — *Il principato veneziano.* Venezia, 1907.

ID. — *Lo studio di Padova e i suoi professori, per il VII centenario della fondazione dell'Università.*

ID. — *Una veneziana del 700.* Venezia, 1919.

NATOLI FABRIZIO. — *L'opera scientifica di Emilio Cossa.* Discorso inaugurale 1909. R. Università di Messina.

NAVARRA CRIMI GAETANO. — *La rendita fondiaria nell'economia individuale.* « Rassegna Economica » Siracusa anno XLVII, maggio 1928.

NERI FILIPPO. — *Acqua potabile.* « Trattato Italiano di Igiene », n. 9.

NICODEMI G. — *L'arte italiana.* Padova, 1929.

NIEWLAND e MAURIZIO TSCHOFFEN. — *La leggenda dei Franchi tiratori di Dinant.* Gembloux, 1929.

OLIVETTI G. — *Sul credito all'artigianato e alla piccola industria.* Roma, 1929 (Ministero dell'Economia Nazionale).

OTTOLENGHI SALVATORE. — *Coordinazione dell'assistenza alla delinquenza fra le istituzioni filantropiche e le funzioni delle autorità di Pubblica Sicurezza.* « Bollettino della Scuola Superiore di Polizia e dei servizi annessi ». 1926-27, fasc. 16-17.

ID. — *Il delinquente per « istintiva tendenza » nel nuovo codice penale « Rocco » e l'antropologia criminale.* « Zacchia », anno VII, n. 1, 2, 3. Roma.

ID. — *La personalità del delinquente nel progetto del nuovo codice penale « Rocco ».* « Zacchia », n. 4, 5, 6, luglio-dicembre 1927.

ORESTANO FRANCESCO. — *L'opzione eroica.* Roma. 1917.

OPERE DI ASSISTENZA AI LATTANTI - FAENZA. — *Relazione sanitaria del quinquennio* 1923-1927 *in un riassunto relativo al ventennio* 1908-1927. Faenza, 1928.

OPERA NAZIONALE COMBATTENTI. — *Campagne antimalariche* 1927-1928.

ORGANIZZAZIONE INDUSTRIALE DEL SERVIZIO TELEFONICO IN REGIME FASCISTA. — 1929.

ORSI PIETRO. — *Sommaria relazione dell'opera svolta come podestà di Venezia. dal 12 settembre 1926 al 14 giugno 1929,*

PACCAGNELLA ERMENEGILDO. — *Propedeutica alla nuova Pedagogia musicale psico-fisiologica sperimentale.* 1929.

PACE L. — *Economia Bancaria.* Roma, 1929.

PAGANO ANTONIO. — *Il problema delle origini del diritto.* IV Congresso int. di Filosofia. Bologna, aprile 1911.

PAIS ETTORE. — *Il più antico trionfo romano sui Germani,* da « Nuova Antologia », 1918. Roma.

PANTALEONI MAFFEO. — *Di alcuni fenomeni di dinamica economica,* dal « Giornale degli economisti », etc. Vol. XXXIX, serie 2ª, 1909.

PANUNZIO SERGIO. — *Lo stato educativo.* 27 maggio 1929.

PAOLETTI PIETRO. — *La Scuola grande di S. Marco.* Venezia, 1929.

PAOLI G. — *I patti agrari esistenti nella provincia di Cagliari.* « Cooperazione rurale », anno II, 6-7-8-9.

PAPI UGO. — *L'attività di credito nei cicli economici.* « Rivista di Politica Economica », anno XVIII, 1928, fasc. VI.

ID. — *Le Banche di credito ordinario nel regime della nuova lira.* « Economia », n. 3, anno VII.

PAPI UGO. — *Lezioni di Scienza Bancaria.* Messina, 1929.
ID. — *Operazioni di « portafoglio estero » e « corso dei cambi ».* « Rivista di Pol. Ec. ». 1929, fasc. I.
PARDI GIUSEPPE. — *La popolazione di Siena e del Senese attraverso lo stato.* « Bollettino Senese di Storia Patria », anno 1925, fasc. I, II.
PARETO VILFREDO. — *Economia dimessa.* Bologna, 1912.
PARIBENI ROBERTO. — *Commemorazione del Socio E. Schiapparelli.* Reale Accademia dei Lincei », serie VI, Vol. IV, fasc. 3-4.
ID. — *Guida del Museo nazionale romano.* Seconda edizione. Roma, 1914.
PARVOPASSU CARLO. — *Recenti progressi della scienza e della tecnica delle costruzioni.* L'« Industria », Vol. XXVIII, Varese, 1914.
PASCAL ERNESTO. — *La crisi nelle università italiane.* « Il Cimento », anno I, n. 1, 1913.
PEANO GIUSEPPE. — *Definitione de numeros irrationale secondo Euclide.* Pavia 1915. « Bollettino della « Mathesis », 1915.
ID. — *Filiberto Castellano,* da « Bollettino della « Mathesis », anno XI, aprile 1919, n. 1-2, 3-4.
ID. — « *Infinito* » (matem.). Estr. dal Supplemento al « Diz. di Cognizioni utili ». Torino, 1918.
ID. — *Logica matematica.* Estr. dal « Bollettino di Bibliogr. e storia delle scienze matematiche », fasc. aprile, maggio, giugno 1913.
ID. — *Residuo in formula de quadratura Cavalieri-Simson.* 1926.
ID. — *Sulla definizione di limite.* « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », Vol. 48, 1912-13.
ID. — *Sulla forma dei segni di algebra.* Anno I, Vol. I, n. 1. Marzo 1919. « Giornale di Matematica Finanziaria ».
ID. — *Giuseppe Peano.* Supplemento ad « Schola et Vita », 27 agosto 1928.
ID. — *Una questione di grammatica razionale.* Bologna, 1912.
PERONDI GIULIANO. — *Come si possa migliorare la prognosi del parto podalico.* « Rivista medica », anno XXXIV, 1926.
ID. — *La morti-natalità in Italia e i limiti d'azione della levatrice.* « Rivista medica », anno XXXVII, 1929.
ID. — *L'autovaccino-terapia anticolibacillare nella pielite delle gravide.* « Atti della Società It. di Ostetricia e Ginecologia », ottobre 1926.
ID. — *Origine, storia e scopi della eugenetica.* « Riassunto della prolusione al corso libero di eugenetica sociale e ginecologia a Firenze », 1928. « La medicina pratica », anno XIII, fasc. 6.
ID. — *Statistica demografica* (considerata dal punto di vista eugenetico). « Bollettino consorziale », anno XV, n. 9, 1929.
PERONI GIACOMO. — *Critica delle relazioni del Prof. Filippo Neri controllore per parte dello Stato nelle campagne antimalariche.* 1927-28.
ID. — *Sull'azione della smalarina.* « Rivista di Malariologia », 1928, n. 5.
PERRONE FRANCESCO. — *I limiti del diritto a duplicati di polizze di carico.* « Diritto e Giurisprudenza », anno XXIV, n. 19-22.
PIANIGIANI ALBERTO. — *Un giacimento antimonifero e solfifero nella Maremma Toscana.* X Congresso della Società Italiana per il progresso delle scienze. Pisa, aprile, 1929.
PICCOLI RAFFAELLO. — *Astrologia Dantesca.* Firenze, 1909.

PICCOLI RAFFAELLO. — *I principî della Politica Sociale*. Bologna, 1911.

PIERACCINI GAETANO. — *Ulteriore contributo alla conoscenza della « azione centralizzatrice fisiologica della donna nella riproduzione dei caratteri della specie*. (Biometria dei neonati e degli infanti). « Scritti Biologici », Vol. IV.

ID. — *Azione centralizzatrice fisiologica della donna nella riproduzione dei caratteri della specie*. « Scritti Biologici », Vol. IV, 1928.

PIETRA GAETANO. — *Ghino Valenti*. Vol. VII, n. 1 « Metron ».

ID. — *Herbert C. Hoover*. « *Amministratore dei viveri durante la guerra mondiale* ». « Economia », n. 3, anno VII, Roma, 1929.

PIGORINI LUCIANO. — *Prime ricerche sulla composizione chimica degli organi legnosi del gelso*. « Archivio di Farmacologia sperimentale e scienze affini» Vol. XXIII, Siena, 1917.

ID. — *Di alcune possibili applicazioni della sericina alla tecnica industriale e di laboratorio*. « Archivio di farmacologia sperimentale e Scienze affini ». Siena, 1916.

PIVANO SILVIO. — *Le valli dei Cavalieri*. Roma, 1917.

PLATANIA S. — *La mortalità infantile a Catania nel ventennio* 1906-1925. « *Maternità e Infanzia* », anno III, n. 9, 1929.

POPPI U. — *Gli impulsi sessuali trasformati in stati effettivi*. « La voce di Bergamo », 14 novembre 1929.

PRATO GIUSEPPE. — *Appunti di parassitologia economica*. « La Riforma sociale », giugno-luglio 1914.

ID. — *Verso l'autonomia doganale ?* « La Riforma sociale », fasc. 2-3, febbraio-marzo 1913.

PRESUTTI. — *La politica interna*. Conferenze sulla storia d'Italia del secolo XIX svolte nell'anno accademico 1922-23. Padova.

PRONTUARIO STATISTICO DELL'U. R. S. S. — 1928.

PROVINCIA DI GENOVA. — *Un triennio di amministrazione straordinaria*. 1926.

PUMA GIACOMO. — *Sull'estensione del teorema di Laplace — Tchebychef alle terne di variabili casuali*. « Rassegna di Matematica e Fisica », anno I, n. 4 e 5.

G. QUAGLIARIELLO. — *Influenza dell'alimentazione sulla riproduzione e sui caratteri della prole*. 2° Congresso di Eugenica. Roma, 1929.

QUARRA PAOLINA. — *Conferenze matematiche torinesi* (adunanza del 24 novembre 1917). Pavia, 1918.

LA QUESTIONE UNGHERESE. — « *Lega per la revisione delle frontiere Ungheresi* ». Milano, 1928.

RABINOWICZ LÉON. — *L'aspetto moderno del problema della natalità*. Roma, 1929.

RADAELI FRANCESCO. — *Alcuni concetti sull'indirizzo degli studi dermatologici*. « Giornale Italiano delle malattie veneree e della pelle », fasc. VI, 1912. Milano.

RAMPONI LAMBERTO. — *Comunione coattiva di muri e distanze legali fra edifici*. Parte 1ª : *La regola*. Torino, 1908. Parte 2ª : *Le eccezioni*. 1909.

RANELLETTI ORESTE. (Circolo giuridico di Milano). — *Il Gran Consiglio del Fascismo e la forma di governo dello stato italiano*. « Bollettino », n. 1.

RAPPORTO *al Comitato degli esperti costituito in virtù della decisione di Ginevra*, dal 16 settembre 1928.

RASMUSSEN E. — *Una protesta.* « Medicina nuova », anno XX, n. 8.
RAVÀ ADOLFO. — *Il diritto come norma tecnica.* Cagliari, 1911.
ID. — *La filosofia del diritto e dello stato alla celebrazione spinoziana dell'Aja.* « Rivista Int. di Filosofia del Diritto », anno VI, fasc. I.
ID. — *Introduzione allo studio della filosofia di Fichte.* Modena, 1909.
ID. — *Il matrimonio secondo il nuovo ordinamento italiano.* 1929.
ID. — *Per una dottrina generale del diritto.* Roma, 1911.
ID. — *Lo stato come organismo etico.* « Athenaeum », 1914, Vol. I.
RAY B. WESTERFIEL. — *Le agenzie di affari negli Stati Uniti* (traduzione del Prof. Cesare Colosimo). Napoli, 1928.
RÉDIADIS PÉRICLÈS. — *Contributo alla teoria dell'imposta sul reddito.* « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica », novembre 1925.
RELAZIONE ANNUALE DELLA FEDERAZIONE NAZ. FASCISTA DELLE INDUSTRIE CHIMICHE ED AFFINI. Anni sociali 1926-27.
RELAZIONE ANNUALE E CONTI DEL 1928 DELL'ISTITUTO NAZIONALE SVIZZERO DI ASSICURAZIONE CONTRO GLI INFORTUNI.
RELAZIONE DEL CONSIGLIO 1928 DELL'UNIONE ITALIANA DI RIASSICURAZIONE. — Roma, 1929.
RELAZIONE DELLA CORTE DEI CONTI SUL RENDICONTO GENERALE DELLO STATO PER L'ESERCIZIO FINANZIARIO 1927-28. « Atti parlamentari ». Legislatura XXVII, Sessione 1924-25.
RELAZIONE DELL'OSPEDALE CIVILE COMUNALE DI MOTTA DI LIVENZA. — 1929.
RELAZIONE STATISTICA 1927-28. — *Svolgimento delle attività nella provincia di Brescia.*
RELAZIONE SULLE OPERE ESEGUITE AL 31 DICEMBRE 1928. — « Società per lo sviluppo economico dell'Albania », 1928.
RENDICONTO GENERALE DELL'AMMINISTRAZIONE DELLO STATO PER L'ESERCIZIO FINANZIARIO 1927-28. Parte 1ª, 2ª. « Atti parlamentari », Legislatura XXVII.
RENDICONTI DEL SEMINARIO MATEMATICO E FISICO DI MILANO. — Vol. II, 1929.
REPACI FRANCESCO A. — *Gli effetti della variazione del valore della moneta sui tributi.* Torino, 1929.
ID. — *Un'indagine dinamica della distribuzione dei redditi nella città di Bari dal 1914 al 1927.* « Annali dell'Istituto di Statistica », anno 1927-28, Vol. II.
RICCI FEDERICO. — *Questioni relative al porto di Genova.* Giugno 1929.
RIEDEL L. — *Basi tecniche per istituti di pensione.* Trieste, 1927.
RIGNANO EUGENIO. — *Dell'attenzione — Vividità e connessione.* « Scientia », Vol. XI, 1912. — *Contrasto affettivo ed unità di coscienza.* « Scientia », Vol. X, 1911.
ID. — *L'evoluzione del ragionamento. Dall'intuizione alla deduzione.* « Scientia », Vol. XIV, 1913. — *Del ragionamento concreto e quello astratto.* « Scientia », Vol. XIV, 1913.
ID. — *Il ragionamento « intenzionale ». Il ragionamento dialettico. Il ragionamento metafisico.* « Scientia », Vol. XX, 1916.
ID. — *Il socialismo.* « Scientia », Vol. VIII, 1910.
RIGOTTI CARLO. — *Una prossima rivoluzione di tutte le imposte in tutti gli Stati.* Torino, 1911.

ROCCA CARLO. — *Delle statistiche del traffico aereo — Modo di compilarle e di interpretarle.* «Rivista di Politica Economica», anno XVIII, 1928, fasc. VII-VIII.

ID. — *Il rendimento economico del traffico aereo.* «Rivista Aeronautica», maggio, n. 5, 1929.

ID. — *La navigazione aerea dal punto di vista economico.* Milano, 1930.

ROCCO ALFREDO. — *Lezioni di diritto commerciale,* raccolte dallo studente G. M. Polacco. Padova, fasc. 6, 1913.

ROBERTI MELCHIORRE. — *I precedenti storici della conciliazione fra lo Stato italiano e la Santa Sede e la legislazione italiana fino al* 1929. «Bollettino», n. 2, 1929.

ID. — *Intorno alla scoperta di Tesni in Sardegna.* Cagliari, 1921.

ID. — *Le origini romano-cristiane della comunione dei beni fra coniugi.* Torino, 1929.

ID. — *Scienza e libertà.* Siena, 1919. (Discorso pronunziato per l'inaugurazione della lapide agli studenti caduti nella 4ª guerra per l'Indipendenza Nazionale).

ID. — *Statuti padovani del periodo comunale perduti o sconosciuti.* Palermo, 1910. Estr. da «Studi in onore di Biagio Brugi».

ROLETTO GIORGIO. — *Le basi geografiche dell'economia bolognese.* Bologna, 1929.

RONCALI B. DEMETRIO. — *L'anatomico fisico-patologo crotoniate Alcmeone.* Napoli, 1929.

ROMA. — *Pianta di Roma e dell'esposizione.*

ROMANELLI ILARIO. — *Le cause di morte più frequenti tra i medici assicurati presso l'Istituto Naz. delle Assicurazioni verificatesi nel decennio* 1919-29.

RONDELLI UGO. — *Alcune curve demografiche.* «Minerva Medica», anno VIII, n. 27, luglio 1928.

ROSASCO EUGENIO. — *Sulla attendibilità delle nostre statistiche di esportazione tessile.*

ROSSI ENZO UMBERTO. — *L'«Economia Reggiana».* Commissione di vigilanza per il censimento degli esercizi industriali e commerciali.

ROSSI GIACOMO. — *La Bonifica di Maccarese, campo dimostrativo anti-malarico.* Portici, 1928.

ROSSI LUIGI. — *Le attuali condizioni della Libia.* Roma, 1920.

RUATTI GIUSEPPE. — *Rapporti fra proprietà, impresa e mano d'opera nell'agricoltura italiana. Piemonte, Trentino e Alto Adige.* Istituto Nazionale di Economia Agraria. 1930.

SAHADUN GIUSEPPE. — *Per una stanza di compensazione internazionale.* Da «Rivista Bancaria», n. 1, gennaio 1921.

SALVADORI GUGLIELMO. — *Il significato filosofico dell'evoluzione.* Bologna, aprile 1911. IV Congresso Int. di Filosofia.

SALVIOLI GAETANO. — *Malattie infettive esotiche.* «Trattato Italiano di Igiene». Torino, 1929.

SALVIONI G. B. — *La cooperazione rurale nel Veneto.* Firenze, 1886.

ID. — *Il testamento spirituale di un economista.* «La Rivista Internazionale di Scienze Sociali e di discipline ausiliarie». Roma, 1896.

SATTA IOSTO. — *L'industria dei fiammiferi.* 1929.

SARVOGNAN FRANCO. — *L'aumento naturale della popolazione italiana.* Composizione regionale e sue variazioni dal 1909-10 al 1924-25. « Bollettino dell'Istituto Statistico Economico », anno III, n. 11-12, 1927.

ID. — *Il concetto di progresso.* « Rivista di Sociologia », anno XV, fasc. V, settembre-ottobre 1911.

ID. — *G. Mazzarella. Studi di etnologia giuridica.* « Scientia », Vol. X (1911), 3.

ID. — *Lezioni sulla Moneta.* Anno accademico 1927-28. Pisa.

SCIALOJA ANTONIO. — *Dell'azione del Ministero d'Agricoltura e commercio nel controllo di legalità sulle società per azioni.* « Rivista di diritto commerciale », anno IX (1911), fasc. IX.

SCOZZARI DIEGO. — *La lotta antimalarica in Tripolitania.*

SCUOLA SUPERIORE DI MALARIOLOGIA. — *Programma della Sezione Medica.* Roma, 1928.

LA SEDE NAZIONALE EBRAICA IN PALESTINA. — 1929.

SEGHETTI GAETANO. — *La mano d'opera agricola e la colonizzazione in Sardegna.* (Ministero dei LL.PP., 1929).

SELLA EMANUELE. — *La concorrenza.* Torino, 1914.

SENSINI GUIDO. — *Determinazione della massa monetaria occorrente ad un dato paese.* « Annali dell'Università di Camerino », Vol. III, 1919.

ID. — *La teoria della « rendita ».* Roma, 1912.

SERBINOW P. — *Sulla terapia della malaria col metodo mercurio antimoniale.* 1927.

SERENA AUGUSTO. — *A proposito di un'opera bibliografica di Sebastiano Rumor.* « Rassegna Nazionale », 1° dicembre 1916.

ID. — *Un fautore dei Monti di Pietà.* Venezia, 1919.

ID. — *Agostino Museo.* Venezia, 1917.

ID. — *Documenti riservati della polizia austriaca nelle provincie Venete* 1860-1864. Venezia, 1916.

SERPIERI ARRIGO. — *Guida e ricerche di economia agraria.* 1929.

SESTINI LEONE. — *Igiene Navale.* Torino, 1930.

ID. — *Profilassi della emigrazione.* « Trattato italiano di Igiene ». Torino, 1928.

SIMONCELLI DOMENICO. — *L'assicurazione obbligatoria contro le malattie professionali e l'industria mineraria.* Roma, 1929.

ID. — *Il Governo del Reich e la figura del primo ministro italiano.* Sora, 1928.

ID. — *Lo stato e l'industria mineraria.* Milano, 1925.

SINDACATO NAZIONALE TECNICI AGRICOLI FASCISTI. — *Prima esposizione generale dell'agricoltura italiana.*

SIMONETTO MOSÈ. — *La bonifica integrale in provincia di Treviso.* Treviso, 1929.

SIOTTO PINTOR MANFREDI. — *La nuova legge sulla cittadinanza nell'impero germanico.* « Rivista di Diritto Internazionale ».

ID. — *Prefazione alla prima versione italiana del « Diritto Pubblico dell'Impero Germanico » di Paolo Laband.* Torino, 1913.

SIRACUSA (*Monografia*). Roma, 1928.

SOCIETÀ REALE MUTUA NEI SUOI CENT'ANNI DI VITA 1828-1928. Il Plebiscito, anno 2°, n. 4-5.

Società delle Nazioni. — *Uno sguardo alla sua opera.* Gennaio 1920. - Dicembre 1926.

Solazzi Siro. — *Errore e rappresentanze.* Torino, 1911.

Solmi Arrigo. — *Gli accordi del Laterano.* « Estr. dal « Bollettino », n. 3.

Soprano Domenico. — *Ripopolamento e bonifica integrale.* « Rassegna Economica », 1928. Dicembre.

Sorrentini Emilia. — *Di alcuni particolari elementi di lotta antitubercolare.* « Le assicurazioni sociali », maggio-giugno 1929, n. 3.

Statistica della produzione industriale dell'anno 1928. — Stoccolma, 1929.

Statistica degli infortuni in agricoltura sotto l'aspetto delle casuali. Roma, 1927.

Statistica degli infortuni nell'industria e nell'agricoltura, anno 1925 (Ministero dell'Economia Nazionale).

Statuto della R. Università degli Studi di Roma. Roma, 1929.

Statuto della Società Italiana di Genetica ed Eugenica. — Roma, 1929.

Sterzi Giuseppe. — *I progressi della nevrologia.* Cagliari, 1910.

Id. — *Josephus Struthius* (Lettore nello studio di Padova). Venezia, 1910.

Strumia Edoardo. — *Sommario di Storia fossanese* (con prefazione di Vittorio Lupo).

Tassinari Giuseppe. — *Nuove tendenze nello studio e nell'insegnamento dell'Economia Agraria.* Piacenza, 1929.

Id. — *Per il riordinamento del servizio di Statistica agraria e forestale e per la costituzione degli Osservatori di Economia rurale.* Roma, 1923.

Terracina Fernando. — *Il compito degli Enti assicurativi di fronte alla salute pubblica.* 1922, Serie F, n. 5.

Tesio Fausto. — *Contributo alla cura della malaria con il Metodo Cremonese.* Roma, 1925.

Tivaroni Jacopo. — *Compendio di Scienza delle Finanze.* Bari, Laterza, 1929.

Id. — *La questione dell'esenzione delle quote minime dell'imposta sui terreni e sui fabbricati e le recenti statistiche delle espropriazioni per cause fiscali.* « Rivista di Politica Economica », anno XVIII, 1928, fasc. VII-VIII.

Tomasini Quinto. — *Bologna nuova* (l'allargamento e i nuovi edifici di via Ugo Bassi). Bologna, 1930.

Id. — *Lorenzo Costa* (1460-1535). « Il comune di Bologna », n. 1, gennaio 1930.

Id. — *Paolo Costa.* « Il comune di Bologna », n. 1, gennaio 1930.

Id. — *Quanti siamo?* Bologna, 1929.

Id. — *Statistiche demografiche bolognesi — Consuntivo* 1929. « Il comune di Bologna », gennaio 1930.

Tommaseo Nicolò. — *Dizionario dei sinonimi della lingua italiana.* Edizione fatta sulla V^a^, Napoli, 1892.

Toniolo A. R. — *Il congresso Int. di Geografia a Cambridge e la partecipazione italiana.* « L'universo », anno IX, n. 10, 1928.

Torresini G. — *I concimi azotati nella coltura del grano.* Milano, 1928.

Tosti Gustavo. — *Il problema del diritto internazionale.* « Rivista di Diritto Internazionale », Vol. VI, fasc. III-IV.

TOSTI LUIGI. — *Rilievi sulla sistemazione attuale di alcune reti ferroviarie lunghe.* « Rivista Tecnica delle Ferrovie Italiane », Vol. XXXV, n. 6, 1929.
TRAVERSO GIOVANNI. — *Cinematografo e delinquenza minorile.* Alessandria, 1929.
TREMELLONI ROBERTO. — *I tecnici e l'organizzazione scientifica dell'industria.* « L'industria Lombarda », 23 novembre 1929.
TRENTIN SILVIO. — *Pagine di vita regionale. Gli enti pubblici del Veneto di fronte al problema delle utilizzazioni idrotecniche.* Venezia, 1922.
TRIESTE. — *La città di Trieste e gli abitanti;* del Dott. Arnoldo Fregessi di Rattalana.
TROVATI A. — *La Borsa Merci corporativa.* « Corriere Mercantile », 30-31 gennaio 1929.
UGGÈ ALBINO. — *Confronti internazionali fra la mortalità per singole cause secondo il metodo del coefficiente tipo.* Milano, 1929.
ID. — *Il centro di popolazione dell'Italia nei nuovi confini.* Milano.
ID. — *Il contributo finanziario delle regioni italiane alla vita dell'Università Cattolica del Sacro Cuore.* Milano, 1927.
ID. — *L'abitazione famigliare.* Milano, « La Famiglia Cristiana ».
ID. — *L'aborto volontario nella Russia dei Soviets.* « Difesa sociale », n. 7-9, 1928. Roma.
ID. — *La misura statistica della mobilità del lavoro.* Milano.
ID. — *La teoria della popolazione di Giammaria Ortes.* Milano.
UGOLINI LUIGI. — *L'antica Albania nelle ricerche archeologiche italiane.* Roma, 1928.
UMANSKY C. A. — *L'economia mondiale ; raccolta di materiale statistico per gli anni* 1913-1917. Mosca, 1928.
R. UNIVERSITÀ DI CAGLIARI. — Istituto Economico Giuridico. *Studi economico-giuridici* pubblicati per cura della facoltà di Giurisprudenza. Anno III, parte prima. Cagliari, 1911.
UNIVERSITÀ COMMERCIALE BOCCONI. — *Annuario* 1924-25.
UNIVERSITÀ DI PADOVA. — *VII Centenario, XV maggio* 1922.
ID. — *Programma della celebrazione del VII centenario.*
UNIVERSITÀ DI ROMA. — *Conferimento della laurea « ad honorem » al nome degli studenti fascisti caduti.* 23 marzo 1927.
UNIONE ITALIANA DI RIASSICURAZIONE. — *Relazione del Consiglio.* Rapporto dei Sindaci. Bilancio per l'anno 1927.
U.S.I.L.A. — *Codice del lavoro* 1926 *e suppl.*
ID. — *L'esercizio delle assicurazioni private.*
ID. — *Memorandum del datore di lavoro (riposo settimanale e festivo).*
ID. — *Limitazione dell'orario di lavoro nelle aziende industriali o commerciali e nelle aziende agricole.* Roma, 1924.
ID. — *Infortuni sul lavoro nell'industria.* Roma, 1928.
ID. — *L'assicurazione contro l'invalidità e la vecchiaia.*
ID. — *Il lavoro delle donne e dei fanciulli.*
VAILATI G. e M. CALDERONI. — *Il pragmatismo e i vari modi di non dir niente.* « Rivista di Psicologia applicata », luglio-agosto 1909.
VASSALLI FILIPPO (necrologia). — *Emilio Paolo Bensa.*
VENEZIA. — *Nel decennale della Vittoria,* 1928.

VERGOTTINI MARIO. — *Su lo sviluppo dei grandi comuni italiani*. « Bollettino dell'Istituto Statistico Economico », n. 1-2, 1929.

VINCI FELICE. — *La produzione solfifera siciliana con speciale riguardo al Consorzio obbligatorio vigente*. « La Riforma sociale », n. 10-11, 1913.

ID. — *La vita delle società per azioni*. « Rivista delle Società Commerciali », anno VIII, fasc. IV, aprile 1918.

VINELLI MARCELLO. — *Note sull'industria, la mano d'opera, la legislazione nelle miniere di Sardegna*. Cagliari, 1914.

VIRGILI FILIPPO. — *L'opera scientifica di G. S. Del Vecchio*. Torino, Bocca, 1918.

WOLLEMBORG LEONE. — *La definizione della società cooperativa*. Roma, 1929.

ZAGAR FRANCESCO. — *Orbita definitiva della cometa* 1913-11. « R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », Vol. XXIX, n. 8, 1928.

ZANINI CANEVA FERRUCCIO. — *La « doppler »*. 1928.

ZINGALI GAETANO. — *Del rapporto tra casi di malattia e casi di morte nelle malattie infettive in generale e nel colera e nella peste in particolare*.

ID. — *Soste portuarie e giacenza di merci. Contributo statistico allo studio del problema del porto di Genova*. « Athenaeum », Roma, 1928.

ZORLI ALBERTO. — *Il fondamento teorico della politica economica*. « Relazione al Congresso di Padova, 20-26 settembre 1909, della Società per il Progresso delle Scienze ».

ADUCCO P. — *Revues, Résumés, reproductions des travaux scientifiques italiens*. (Archives italiens de Biologie, tome LXII, fasc. III).

ALBERTONI P. et TULLIO P. — *Sur la méthode de recherches dans l'étude de l'alimentation dans les différentes classes sociales*. Bruxelles, 1910.

ANDRÉADÈS A. — *De la population de Constantinople sous les empereurs byzantins*. Ind. Graf. It., 1920, Vol. I, n. 2. « Metron ».

ID. — *Le progrès économique de la Grèce*. « Journal des Economistes ». Paris, janvier et février, 1919.

ID. — *Le régime fiscal des spiritueux en Grèce*. Bucarest, 1906.

ID. — *Les obligations financières envers la dette publique ottomane des provinces détachées de l'Empire Turc depuis le traité de Berlin*. « Revue générale de droit international public ». Paris, 1908.

ID. — *Un coup d'œil sur les finances serbes. Leur présent et leur avenir*. « Revue économique internationale », novembre 1909. Bruxelles.

ANHENUIS S. — *Sur l'origine du culte des Astres*. « Scientia », Vol. IX, 1911.

ANNIVERSAIRE DÉCENNAL DE L'INDUSTRIE MÉTALLURGIQUE EN POLOGNE INDÉPENDANTE. — 1929.

ANNUAIRE DU COMMERCE EXTÉRIEUR DE LA RÉPUBLIQUE POLONAISE. — 1926-27 ; IBIDEM 1928.

ANNUAIRE STATISTIQUE DE FINLANDE. — 1928

ANNUAIRE STATISTIQUE DU ROYAUME DE BULGARIE. — 1927, XIXème année. Sofia, 1929.

ANNUAIRE STATISTIQUE DE LA LETTONIE. — 1927. Riga, 1928.

ANNUAIRE STATISTIQUE DE LA NORVÈGE. — 1929.

ANNUAIRE STATISTIQUE DE LA RÉPUBLIQUE POLONAISE. — 1928.

ANNUAIRE STATISTIQUE DE LA ROUMANIE. — 1927. Bucarest, 1928.
ANNUAIRE STATISTIQUE DE LA TURQUIE. — Premier volume, 1928.
ANTONELLI ETIENNE. — *La Russie Bolcheviste.* Paris, Bernard Grasset, 1919, Vol. I, pag. 278.
L'ASSURANCE-GRÊLE DANS QUELQUES PAYS ET SES PROBLÈMES. — Rome, 1911.
BELGIQUE. — *Enquête sur la situation des industries au 31 octobre* 1926. Vol. I, Vol. II. Bruxelles, 1927-28.
ID. — *Mouvement de la population et de l'état civil pour les années* 1911 *à* 1920. Gand, 1928.
BERTILLON JACQUES. — *Cours élémentaire de statistique administrative.* Paris, 1896, Vol. I, pag. 600.
BOHAC A. — *Nationalité et recensement.* Praha, 1930.
ID. — *Population de la république Tchécoslovaque. Etudes démographiques.* Année 1927.
BORSI UMBERTO. — *Municipalisme et internationalisme.* « Extrait des Mélanges Maurice Haurion ». Paris, 1929.
BOTTAZZI FILIPPO. — *Les problèmes modernes de la nutrition.* « Scientia », Vol. XXIII, 1918, aprile.
BOUCHACOURT L. — *Sur la natalité et les suites en nourrice à Paris.* — de 1920 à 1927. « Bulletin de la Société d'Obstétrique et de Gynécologie de Paris », n. 4, avril 1927.
ID. — *Sur les préceptes Eugéniques qui sont contenus dans les lois de Lycurgue.* « Gynécologie et Obstétrique », t. XVI, n. 6, novembre 1927.
BOURDON JEAN. — *La fiscalité de guerre.* Extrait du « Metron », vol. I, n. 1. Industrie Grafiche Italiane, 1920, Rovigo.
BOUSQUET G. H. — *Cours d'économie pure.* Paris, 1928.
ID. — *La Restauration monétaire et financière de l'Autriche.* Paris, 1927.
BOWLEY ARTHUR. — *Eléments de Statistique.* Paris, 1929.
BULLETIN DE L'INSTITUT INTERNATIONAL DE STATISTIQUE. Tome XXII, 1ère, 2ème livraison, 1928. Le Caire.
BULGARIE. — *Comptes de ménage pendant le mois de mars* 1925. Libre II. Sofia, 1928.
ID. — *Le mouvement extérieur de la Bulgarie. Importation et exportation.* 1er et 2ème trimestre de 1928.
ID. — *Liste des localités dans le royaume depuis la libération* (1879) *jusqu'en* 1910. 1921.
ID. — *Statistique agricole pour l'année* 1927.
ID. — *Statistique des coopératives dans le royaume de Bulgarie en* 1925. Sofia, 1929.
ID. — *Statistique de l'enseignement dans le Royaume de Bulgarie,* année scolaire 1924-25. Sofia, 1929.
ID. — *Statistique criminelle* 1926-27.
ID. — *Statistique criminelle. Crimes et délits et individus jugés pendant l'année* 1925. Sofia, 1927.
ID. — *Statistique des coopératives dans le royaume en* 1924.
ID. — *Statistique du commerce du royaume de Bulgarie avec les pays étrangers en* 1926 *el* 1927.

Bulgarie. — *Statistique des prix et l'indice du coût de la vie en* 1928.
Id. — *Liste des localités dans le Royaume de Bulgarie, depuis la liberation* (1879) *jusqu'en* 1910. 1921.
Id. — *Le mouvement extérieur de la Bulgarie. Importation et exportation.* 1er et 2ème trimestre de 1928.
Id. — *Mouvement de la population dans le Royaume de Bulgarie en* 1923. IIème partie : naissances, décès, mariages. Sofia, 1928.
Id. — *Mouvement de la population dans le Royaume de Bulgarie en* 1924 Sofia 1928. IIème partie : naissances, décès et mariages.
Bureau International du Travail. — *Bibliographie de l'Organisation internationale du Travail.* Genève, 1929.
Id. — *Conférence Internationale sur la statistique des salaires.* Genève, 1929.
Id. — *Conférence Internationale du Travail.* Douzième Session, 1929. Rapport du Directeur.
Id. — *Conférence Internationale du Travail.* Trézième Session 1929 ; 2ième, 3ième, 4ième questions, à l'ordre du jour.
Id. — *Conférence Internationale du Travail.* Rapport sur la protection des ouvriers occupés au chargement ou au déchargement des navires contre les accidents. Genève, 1929.
Id. — *Conférence Internationale du Travail.* Deuxième Session, 1929. Travail forcé.
Id. — *Enquête sur la production. Mémoire introductif.* 1920.
Id. — *La durée du travail à bord.* Genève, 1929.
Id. — *La durée du travail des employés.* Genève, 1927.
Id. — *La réglementation des heures de travail à bord des navires.* Genève, 1929
Id. — *Les méthodes de la Statistique des accidents du travail dans les mines de charbon.* Genève, 1929.
Id. — *Les mouvements migratoires de* 1925 *à* 1927. Genève, 1929.
Idl — *La liberté syndicale.*
Id. — *La réglementation des migrations.*
If. — *Les mouvements migratoires de* 1925 *à* 1927. Genève, 1929.
Id. — *Les essoreuses.* Genève, 1929.
Id. — *Onzième session.* Vol. I et II, 1928.
Id. — *Recueil International de Jurisprudence du Travail.* 1927. Genève, 1928.
Id. — *Statuts et règlements.* Octobre, 1921.
Conférence Internationale du Travail. — *Deuzième Session.* Genève, mai 1924. *Rapport sur la prévention des accidents du travail. Première question à l'ordre du jour.* Génève, 1929.
Id. — *Douzième Session,* 1929. Rapport du Directeur.
Id. — *Douzième Session* 1929. Travail forcé.
Id. — *La durée du travail des employés* (*rapport et projet de questionnaire*). Genève, 1929.
Id. — *Questionnaire :* 1-2-3-4-. Genève, 1929, quinzième session
Bureaux Municipal d'Amsterdam. — N. 33. *Statistique démographique des grandes villes du monde pendant les années* 1880-1909. Europe. Amsterdam, 1911.
Bureaux de Statistique de l'Etat Letton. — *Institution de crédit de* 1919 *à* 1927-1929.

CADOUX GASTON. — *Nos pertes de guerre, leurs réparations et nos dettes de guerre.* 1926.

CANNAN EDWIN. — *Histoire des théories de la production et de la distribution dans l'économie politique anglaise de* 1776 *à* 1848. Paris, 1910.

CARACCIO UMBERTO. — *Discussion sur les changes. Les remèdes. Bulletin Périodique de la presse italienne.* Institut Français. Milan.

CECOSLOVACCHIA. — *Balance des paiements par le Dr. Pavel Smutny.* Prague, 1928.

ID. — *Commerce extérieur de la République Tchécoslovaque en* 1926. II partie. *Commerce spécial* (2ième section). *Prise en note et transit.* Prague, 1927.

ID. — *Commerce extérieur de la République Tchécoslovaque en* 1927. 1ère partie. *Commerce spécial* (1ère section). Prague, 1928.

ID. — *Superficies ensemencées et récoltées des produits agricoles en* 1923 *et industrie agricole, avec un suppl. relatif à l'apiculture dans la République Tchécoslovaque.* Prague, 1925.

CHAMBRE DE COMMERCE INTERNATIONALE. — *Les statistiques industrielles internationales.* Paris.

COMMUNICATION *sur la Conférence Intern. sur les statistiques économiques, n.º* 3, *concernant l'unification des méthodes dans le domaine des statistiques économiques,* nº 1, documents préparatoires.

CONFÉDÉRATION ITALIENNE DES SYNDICATS FASCISTES DE L'AGRICULTURE. *Ses origines, ses organisations, ses résultats.* Rome, 1929.

CONFÉRENCE FINANCIÈRE INTERNATIONALE. — *Comptes rendus de la Conférence.* Tome II, Vol. II.

CONFÉRENCE INTERNATIONALE DU SERVICE SOCIAL. — Paris, 8-13 juillet 1928, Vol. 1-2, pagg. 971-516. Paris, 1929.

CONGRÈS INTERNATIONAL D'AGRICULTURE. — XIII (26 mai-1er juin 1927). *Liste des Rapporteurs.* Roma, 1927.

1er CONGRÈS INTERNATIONAL D'HYGIÈNE MENTALE. — 5-10 mai 1930.

CONGRÈS INTERNATIONAL D'OCÉANOGRAPHIE, HYDROGRAPHIE MARINE ET HYDROLOGIE CONTINENTALE. Seville, 1-6 mars 1929.

5ÈME CONGRÈS MONDIAL DES TRANSPORTS AUTOMOBILES (septembre 1928). — *Stuart Gallenga. Discours. Martelli Alessandro. Discorso inaugurale.*

CRACOVIE. — *Guide illustré,* 1929.

DALLA VOLTA. — *Alcuni aspetti dell'ordinamento bancario negli Stati Uniti.* « Rivista Bancaria », aprile-luglio 1928 e febbraio 1929.

DARMOIS G. — *Statistique mathématique. Encyclopédie Scientifique.* Paris, 1927.

DIMITROFF. — *Etat et mouvement de la population en Bulgarie après la guerre.*

ID. — *Le commerce extérieur de la Bulgarie pendant la décennalité* 1911-1920.

DIRECTION GÉNÉRALE DE LA STATISTIQUE. — *Aperçu statistique sur le Brésil destiné à la Conférence internationale du commerce qui aura lieu à Rio de Janeiro du* 5 *au* 12 *septembre* 1927.

DIRECTION D'AGRICULTURE ET DES FORÊTS. — *Le service de statistique agricole en Espagne.* Madrid, 1927.

DIVISIA. — *L'épargne et la richesse collective.* Vol. I, pag. 240. Paris, 1928.

DOBROVITZ A. — *La réforme du service statistique en Hongrie.* « Journal de la Société Hongroise de Statistique », 1929, nº 1-2.

DURKHEIM E. — *Le socialisme — sa définition — ses débuts — la doctrine Saint-Simonienne — édité par M. Mauss.* Paris, Librairie F. Alcan.

E.N.I.T. — *Les grands lacs italiens.* Ente Nazionale delle Industrie Turistiche. Ferrovie dello Stato.

L'ETRANGER EN POLOGNE.

M. FALKNER SMIT. — *Communication sur les méthodes de la statistique des forces motrices.* Moscou, 1929.

ID. — *La statistique au pays des Soviets. Institut International de Statistique.* Moscou, 1929.

FERRI HENRY. — *La Sociologie criminelle.* Paris, 1923.

FINLANDE. — *Rapport de l'enquête sur les sociétés d'Assistance mutuelle en cas d'enterrement.* Helsingfors, 1910.

ID. — *La question des îles d'Aland* (octobre 1920). Helsingfors, 1920.

ID. — *L'imposition communale sur les revenus de* 1924. Helsinki, 1928.

FOREL AUGUSTE. — *Le vrai socialisme de l'avenir.* Lausanne, 1927.

FREND JEAN. — *La farine de Soja.* « La Presse Médicale », nº 6 du 19 janvier 1927.

GINI C. — *L'enquête de la Société des Nations sur la question des matières premières et des denrées alimentaires.* « Metron », Vol. II, n. 1-2, 1922, Taddei, Ferrara.

ID. — *Rapport sur la question des matières premières et des denrées alimentaires.* Société des Nations.

GIRARD J. — *Rapport à l'Institut International de Statistique fait à la session de Varsovie, d'août* 1929 *au nom de la Commission des transports à l'intérieur.* Inst. Int. de Stat. Varsovie, 1929.

GOLDMAN FRANZ et A. GROTJAHN (Bureau Int. du Travail). — *Etudes et Documents.* Série M, n. 8). « Les prestations de l'assurance-maladie allemande du point de vue de l'hygiène sociale ». Genève, 1928.

HENRY ALBERT. — *Administration et fonctionnaires.* Bruxelles, 1930, Vol. I, pagg. 379.

ID. — *Dans l'antre du cyclope.* Bruxelles, 1929.

ID. — *Théorie de la stabilité des emplois publics.* « Revue internationale des Sciences administratives ».

ID. — *Un aspect peu connu de l'Agriculture Belge.* « Revue des Questions Scientifiques ». Octobre, 1927.

L. HERSCH. — *La population de la Palestine et les perspectives du Sionisme.* « Biblioteca « Metron », serie A., n. 2.

ID — *Les fluctuations saisonnières du chômage dans l'industrie du bâtiment de certains pays européens.* « Revue Int. du Travail », Vol. XIX, nº 1, 2, 3, 1929.

HONGRIE. — *Cartes et notions géographiques, historiques, etnographiques, économiques et intellectuelles.*

KOVACS ALOYSE. — *Le problème de la statistique des nationalités. Réponse à un article roumain.* « Journal de la Société Hongroise de Statistique », 1929, nº 1-2.

INSTITUT INT. D'AGRICULTURE. — XIII Congrès, Actes, Vol. I, II, III, IV.

ID. — *Annuaire de Statistique agricole. Année* 1928-29.

ID. — *Assemblée générale. Troisième session.* Mai 1911. Rome, 1911, pagg. 640.

INST. INT. D'AGRICULTURE. — *IXième Assemblée générale.* Octobre 1928.
ID. — *Guide officiel des délégués.* Rome, 1928.
ID. — *La lutte contre les sauterelles dans les divers pays.* Rome, 1916.
ID. — *Le transport par mer des céréales et les frets.* Rome, 1916.
ID. — (C.I.S.A.). — *Résolutions adoptées à la première session.* Novembre 1927.
INST. INT. DE STATISTIQUE. — *Aperçu de la démographie des divers pays du monde.* 1929 : 1) *Etat de la population* ; 2) *Mouvement de la population.*
ID. — *Evolution de la Statistique de l'instruction publique en Oukraine.* 1929.
ID. — *XIIIième session du 4-8 septembre 1911 à la Haye.* La Haye, 1911.
ID. — *XIVième session. Vienne 1913. 9 septembre. Séance d'ouverture.*
ID. — *Rapport du Secrétaire général directeur de l'Office Permanent.* 1927-1929. Varsovie, 1929.
CAMILLE JACQUART. — *La Haye ou Genève.* « Journal de la Société Hongroise de Statistique », année 1929, nº 1-2.
BORIS JASTREMSKY. — *L'analyse de la valeur représentative des deux relevés effectués annuellement par la statistique agricole de l'U. R. S. S.* Institut International de Statistique. Moscou, 1929.
JULIN ARMAND. — *Principes de Statistique théorique et appliquée.* Tome deuxième. Statistique économique.
LA FAILLITE DU COLLECTIVISME EN RUSSIE. — 1928.
LALANDE ANDRÉ. — *Du parallelisme formel des sciences normatives.* Extrait « Revue de Métaphysique et de Morale », IVième Congrès Intern. de philosophie. Bologne (6-11 avril).
LAYTON W. T. et C. RIST. — *La situation économique de l'Autriche.* (Rapport présenté au Conseil de la Société des Nations).
LE CHÔMAGE INVOLONTAIRE DU MONDE, SES EFFETS, SES CAUSES ET LES MOYENS DE LE COMBATTRE.
LE HAVRE. — *Rapport sur l'année* 1914. Le Havre, 1915.
LE NAIN LOUIS. — *Rapport sur l'état du Palais des Académies après le départ des Allemands.* Bruxelles, 1919.
LE SEUL MOYEN D'ÉTABLIR LA PAIX PERPÉTUELLE AVEC CERTITUDE.
LETTONIE — BUREAU DE STATISTIQUE DE L'ETAT. — *Annuaire Statistique de la Lettonie pour l'année* 1928. 9ième édition. Riga, 1929.
ID. — *Elections dans la saemia de la République de Lettonie en* 1928. Riga, 1929.
ID. — *Etat de l'Agriculture en Lettonie de* 1928.
ID. — *Finances des Communes rurales de* 1921 *à* 1928-29. Riga, 1929.
LIGUE POUR LA RÉVISION DU TRAITÉ DE TRIANON. — *Les données statistiques des enclaves homogènes hongroises et allemandes dans les états dits successeurs.* Budapest, 1928.
LIPINSKI. — *Note sur les méthodes de travail de l'Institut Polonais de recherches sur le mouvement général des affaires.* Inst. de Statistique. Varsovie, 1929.
LORTSCH CHARLES. — *La Hongrie Economique et les intérêts français en Hongrie.* Paris, 1927. Marcel Giard, Vol. I, pag. 178.
LUTARIO A. — *Rapport sur l'enquête relative aux médecins de bord.* « Office Int. d'Hygiène ». Paris, 1929.
MAHAIM ERNEST. — *L'organisation économique de la Société des Nations. La signification.* « Revue Belge » du 1er Mars 1929.

MANUEL DES VALEURS COTÉES À LA BOURSE DE GENÈVE. — 1913. 1920-28.
MARCH LUCIEN. — *Démographie*. 1929.
ID. — *La Méthode Statistique « Metron »*. Vol I, 1.
ID. — *Note sommaire signalant la suite donnée aux résolutions de l'I. I. de Statistique* (Le Caire, décembre 1927) *au sujet de la Statistique Intellectuelle*. Inst. Int. de Stat. Varsovie, 1929.
MARCH L., J. MORET, G. HAWTREY, GIDE C., ecc. — *Problèmes actuels de l'économie*. Librairie Armand Colin. Paris, 1921.
MARCH LUCIEN. — *La méthode statistique*. Ind. Grafiche Italiane, 1920, Vol. I, n. 1, 1920 « Metron ».
MASSON-OURSEL. — *Objet et Méthode de la Philosophie comparée*. Librairie Collin, Paris.
MARTIN H. — *Situation juridique et signification économique de la ville libre de Dantzig*. Dantzig, 1928.
MICHEL MANOILESCO. — *Les Etats-Unis d'Europe* (manoscritto).
ID. — *Théorie du protectionisme et de l'échange international*. Paris, 1929.
MAUNIER RENÉ. — *Essais sur les groupements sociaux*. Paris, 1929.
ID. — *Introduction à la Sociologie*. Paris, Félix Alcan, 1929.
ID. — *Les grands marchés des matières premières*. Paris, 1928.
METHORST H. W. — *Application de la statistique à la démographie et à la santé publique*. « *Revue d'Hygiène* », Tome I, n. 4, avril 1928.
D. MICHAYKOFF. — *Les centenaires en Bulgarie*. (Direction Générale de la statistique). Sofia, 1929.
MIECZYSLAW ORLOWICZ. — *Guide illustré de la Pologne*. Varsovie, 1927.
MINISTÈRE DE L'INDUSTRIE DU TRAVAIL ET DU RAVITAILLEMENT. — *Belgique. Le registre des licences en Belgique*. Février, 1921.
MINISTÈRE DE L'INTÉRIEUR ET DE L'HYGIÈNE. — *Statistique des accidents de roulage et de la circulation survenus sur la voie publique au cours de l'année* 1927. 1929.
MINISTÈRE DU TRAVAIL. — *Statistique générale de la France et service d'observations des prix. Compte rendu des travaux. Année* 1917.
MIRIMANOFF D. — *Les épreuves répétées et les formules approchées de Laplace et de Charlier*. Estr. « Commentarii Mathematici Helvetici », Vol. 1926, fasc. 1.
MOSSO. (Archives Italiennes de Biologie). Tome XXX, fasc. III. *Revues, résumés, reproductions des travaux scientifiques italiens*.
JOSEF MRAZ. — *Quelques considérations sur la statistique de la production industrielle*. Prague, 1925.
O. MUNERATI. — *L'hérédité de l'Albanisme en Beta Vulgaris*. Berlin, 1927.
ID. — *Possibilité de déterminer l'âge des graines de blé par la température de leur germination*. « Académie des Sciences », février, 1926.
ID. — *Trois générations de Beta Vulgaris L. dans l'espace d'une année*. « Académie des Sciences ». Janvier, 1927.
NEMTSCHINOFF V. — *Les méthodes de groupement des exploitations agricoles pratiquées par la statistique de l'U. R. S. S.* Inst. Int. de Statistique. Moscou, 1929.
NISOT MARIE THÉRÈSE. — *La question eugénique dans les divers pays*. Bruxelles, 1928.

J. W. Nixon. — *Quelques problèmes de la Statistique des accidents à la lumière des statistiques britanniques.* B. I. T. Genève, 1928.

Oblath Oscar. — *Les tests de vision des couleurs.* « Bureau Int. du Travail », 1929.

Ollion Henry. — *Notes sur quelques lettres inédites de Locke.* IV Congrès Int. de Philosophie. Bologne, 1911.

Pearl Raymond. — *L'accroissement de la population au point de vue biologique.* « Proceedings of the world population conference ». Genova, 1927.

Pera C. — *Le Catholicisme en Italie.* 1928, Torino.

Pernambuco (Estado de). — *Annuario Estatistico.* Anno II, 1928.

Piccard Sophie. — *Sur les courbes binomiales.* Université de Lausanne, 1929.

Piekalkiewicz J. — *Dépenses et recettes des collectivités de droit public.* Inst. Int. de Stat. Varsovie, 1929.

M. Poliak et M. Bineman. — *Communication sur l'unification des méthodes des enquêtes sur les budgets ouvriers.* Inst. Int. de Statistique. Moscou, 1929.

Pologne. — *Exposition générale polonaise de Poznau,* 1929. *Guide à travers l'exposition.*

Id. — *Le premier récensement de la République Polonaise au* 30 *septembre* 1921. *Bâtiments.*

Id. — *Le premier récensement général :* 1921. *Exploitations rurales : Département de l'Ouest.*

Id. — *Statistique des finances communales.* 1919-1922-1924. Varsovie, 1928.

Id. — *Statistique des finances communales, dépenses et recettes des arrondissements autonomes en* 1925 *et en* 1926.

Pontus Fahlbeck. — *Les classes sociales.* Paris. Imprimerie Chaix.

« Pour l'avenir ». — *Fondation pour la justice sociale dans l'éducation.* Genève, janvier, 1921.

Pribram K. — *Rapport sur l'uniformisation internationale des statistiques de l'habitation hurbaine.* Inst. Int. de Statistique. Varsovie, 1929.

Proudhon P. H. — *Qu'est ce que la propriété ?* premier, deuxième mémoire. Paris, 1873, Vol. I, pagg. 336.

M. Ptoukha. — *Mortalité en Russie et Ukraine.* 1928.

Id. — *Mortalité en les* 11 *nationalités de la Russie à la fin du XIX siècle.* 1928.

Id. — *Mortalité en Russie et Ukraine.* 1928.

François Quesnay. — *Tableau économique,* first printed in 1758 and now reproduced in facsimile for the British Economic Association. London, Mac Millan and Co. 1894.

Ragnar Frisch. — *Sur une formule générale de moyenne.*

Ravà . Adolfo. — *Descartes, Spinoza, et la pensée italienne.* 1928. Paris.

Recensement de la population de l'Islande le 1er décembre 1920.

Rédiadis Périclès. — *Mémoire sur l'organisation des impôts directs modernes.* Athènes, Petrakos.

Risser René. — *Note sur la possibilité de représentation d'une population par la loi de Makeham.* « Bulletin trimestriel de l'Institut des Actuaires Français », n. 128, mars 1927.

De Roos J. R. B. — *Rapport de la commission pour l'étude comparative des statistiques criminelles dans les divers pays.* Inst. Int. de Statistique. Varsovie, 1929.

RUEFF JACQUES. — *Les variations du chômage en Angleterre.* « Revue politique et parlementaire », 10 décembre 1925.

RZEPKIEWICZ S. — *Observations sur la possibilité des comparaisons des statiques criminelles de divers pays.* Inst. Int. de Statistique. Varsovie, 1929.

SAHADUN GIUSEPPE. — *Bureau de Compensation International.* « Rivista Bancaria », Vol. II, n. 1, janvier 1921, Milano.

SAYONS ANDRÉ. — *Les procédés de paiement et la monnaie dans l'Amérique espagnole du XIVième siècle.* Bruxelles, 1918.

SCHNELLER CHARLES. — *Evaluation de la mortalité infantile.* Revue de la Société Hongroise de Statistique. Année 1924, nº 2.

SCHNELLER CHARLES. — *La mortalité en Hongrie.* Budapest, 1930.

SENSINI GUIDO. — *Les théories récentes sur les bénéfices du producteur.* Annali dell'Università di Camerino, Vol. II. Roma, 1928.

SMOULEVITHS. — *Communication sur l'établissement d'une nomenclature et d'une classification internationale des troubles de la santé physique.* Moscou, 1929.

PAVEL SMUTNY. — *Balance des paiements.* « Bulletin Statistique de la République Tchécoslovaque ». Prague, 1928.

SLUTSKY EUGÈNE. — *Sur les fonctions éventuelles continues intégrables et dérivables dans le sens stochastique.*

ID. — *Sur un criterium de la convergence stochastique des ensembles de valeurs éventuelles.*

SOCIÉTÉ DES NATIONS. — *Annuaire Statistique International,* 1928.

ID. — *Commerce International et balance des paiements.* Vol. I, Vol. II, 1929.

ID. — *Commission économique et financière provisoire* (section économique). *Rapport sur certains aspects du problème des matières premières.* Tome 1-2.

ID. — *Comptes rendus de la conférence internationale concernant les statistiques économiques.* Genève, 26 novembre-14 décembre 1928.

ID. — *Compte rendu des travaux de la Commission Economique et Financière Provisoire.* (1920).

ID. — *Conférence Internationale du Travail. Onzième Session.* Vol. I et II, 1928.

ID. — *Double imposition et évasion fiscale.* 1928, Genève.

ID. — *La conférence internationale sur les statistiques économiques.*

ID. — *Mémorandum sur les finances publiques.* 1926-28.

ID. — *Mémorandum sur le Commerce International et sur les balances des paiements.* 1926-28, Genève, 1929.

ID. — *Memorandum sur le Commerce International et sur les balances des paiements.* 1913-1927.

ID. — *Procès-verbal de la Huitième Session.* Genève, 19-27 avril 1929.

ID. — *Rapport du Comité spécial pour l'étude des questions de concurrance entre voies ferrées et voies d'eau.* Genève, 1929.

ID. — *Rapport sur les travaux de la Commission du Paludisme,* à la conférence tenue à Genève du 25 au 29 juin 1928. Genève, 1928.

SOIXANTE ANNÉES DE PROSPÉRITÉ 1867-1927. *Jubilé de diamant de la Confédération du Canada.*

SOREL GEORGES. — *Réflection sur la violence.* Paris, 1910.

STATISTIQUE DES ACCIDENTS DE ROULAGE ET DE LA CIRCULATION SURVENUS AU COURS DE L'ANNÉE 1927. Gand, 1929.

STATISTIQUES DÉMOGRAPHIQUES OFFICIELLES DE L'ISLANDE. Genève. Société des Nations, 1929.

STATISTIQUE DE L'ETAT LETTON. — *Commerce extérieur et transit de la Lettonie.* 1929.

STATISTIQUE MINIÈRE DE LA ROUMANIE POUR L'ANNÉE 1928.

STATISTIQUE OUVRIÈRE DE FINLANDE. — *Recherches sur les salaires dans l'industrie de l'imprimerie en Finlande.* 1906, par G. R. Snellman.

STATISTIQUE OUVRIÈRE. — *Recherches sur les conditions professionnelles des ouvrières de l'aiguille,* par Vera Hjelt. 1908.

STATISTIQUE OUVRIÈRE DE FINLANDE. — *Recherches sur l'industrie de l'imprimerie en Finlande,* par G. R. Snellman, 1907.

STATISTIQUE OUVRIÈRE. — *Enquête sur le travail de nuit des ouvrières dans les industries finlandaises,* par Eekla Hultin, 1920.

STATISTIQUE OUVRIÈRE DE FINLANDE. — *Recherches sur l'industrie du verre,* par G. R. Snellman, 1913.

ID. — *Recherches sur l'industrie des scieries,* par G. R. Snellman, 1914.

ID. — *Recherches sur l'industrie du papier,* par G. R. Snellman, 1912.

ID. — *Recherches sur les ateliers mécaniques,* par G. R. Snellman, 1911.

STATISTIQUE OUVRIÈRE. — *Recherches sur le temps du travail dans les usines et petits ateliers,* par G. R. Snellman, 1910.

ID. — *Recherches sur le travail non scolaire des élèves des écoles primaires,* par G. R. Snellman, 1908.

ID. — *Recherches sur les commis de Bureaux et de boutique,* par G. R. Snellman, 1909.

ID. — *Recherches sur les conditions économiques des ouvriers industriels,* 1908-1909, par Vera Hjelt.

STATISTIQUE DE LA POLOGNE. — *Le premier recensement général du 30 septembre 1921. Lieu de naissance, durée du séjour.*

STATISTIQUE CRIMINELLE DE LA POLOGNE. — *Personnes condamnées et acquittées irrevocablement en 1924 et 1925.*

STATISTIQUE DE LA POPULATION DE L'OUKRAINE CONTEMPORAINE. Moscou, 1929.

STATISTIQUE DU TRAVAIL. — *Textilindustrin.* Helsingfors, 1904.

ID. — *Bagareyrket.* Helsingfors, 1905.

E. SZTURM DE SZTREM. — *L'application des méthodes statistiques aux recherches sur les indices du développement économique* Inst. Int. de Stat. Varsovie 1929.

ID. — *Cultures et récoltes en 1927-28.* Varsovie, 1929.

ID. — *Nouvel indice des prix de gros de l'Office Central de Statistique.* Varsovie, 1927.

ID. — *Le recensement agricole général.* Varsovie, 1928.

S. SZULC. — *Sur la standardisation (correction) des coefficients.* Inst. Int. de Stat. Varsovie, 1929.

TEODORESCO et N. ISTRATE. — *Méthode pour la connaissance des minorités ethniques.* « Les annales économiques et statistiques ». Bucarest, 1928.

GUSTAVE THIRRING. — *La statistique de l'habitation à Budapest, son organition, son développement et ses méthodes.* « Journal de la Société Hongroise de Statistique ». Année 1929, nº 1-2.

GUSTAVE THIRRING. — *Rapport sur les travaux de l'annuaire statistique des grandes villes*. Inst. Int. de Stat. Varsovie, 1929.
TRAITÉ DE PAIX. — *Entre les puissances alliées et associées et l'Allemagne*. Protocole signé à Versailles le 28 juin 1919. Paris, 1919.
TURQUIE. — *Annuaire Statistique. Premier Volume* 1928. Angora, 1928.
ID. — *Annuaire Statistique. Deuxième Volume* 1929. Angora, 1929.
ID. — *Recensement général de la population au 28 octobre* 1927. Angora, 1929.
ID. — *Compte rendu du recensement industriel* 1927.
UNE STATISTIQUE INDUSTRIELLE INTERNATIONALE ET COMPARABLE.
VAGNETTI L. — *Statistique Internationale des migrations*. Inst. Int. de Statistique. Varsovie, 1929.
VARSOVIE. — *Donnée Statistiques*. Plan de la ville, 1929.
LÉON WALRAS. — *Théorie de la monnaie*. Lausanne, 1886.
WISHART JOHN. — *Le traitement correct des problèmes de corrélation multiple en météorologie et en agriculture*. Paris, Congrès de La Rochelle (1928).

ADAMS DOROTY. — *Dark Adaptation*. « Medical Research Council », 1929.
AGRICULTURAL RETURNS OF ENGLAND AND WALES. — *Produce of crops*, 1928.
AIKMAN M. JOHN. — *Distribution and structure of the forests of Eastern Nebraska*. « University studies January-april 1926, Vol. XXVI, n. 1-2.
ALPATOW W. W. — *Variations of hooks on the hind wing of the honey bee*. « Reprinted from Biological Bulletin », Vol. LV, n. 3, September 1928.
ALPATOW W. and A. M. BOSCHKO-STEPANENKO. — *Variation and correlation in serially situated organs in insects, fishes and birds*. « The American naturalist », Vol. LXII, September-october 1928.
ANDERSON EDGARD. — *Studies on self-sterility, the genetic basis of cross-sterility in nicotian*. « Genetics » 18-40 January 1924.
ANNALS OF THE ACADEMY OF POLITICAL AND SOCIAL SCIENCE. — *Present day immigration*. January 1921, n. 182.
ANNUAL REPORTS AND ACCOUNTS OF THE NATIONAL BANK OF CZECOSLOVAKIA FOR THE YEAR 1928.
ANNUAL REPORT. — *Department of Health. Palestine*, 1928.
ANNUAL REPORT OF THE ROCKFELLER FOUNDATION. — New York ,1928.
ANNUAL REPORT ON THE STATISTICS OF LABOR. — *The commonwealth of Massachusetts* 1927-1928.
BABSON WARD ROGER. — *Business barometers used in the accumulation of money*. Wellesley hills, 1928.
BAKER O. E. — *Do we need more farm hand ?* U. S. Department of Agriculture, 1928.
ID. — *Population, food supply and american agriculture*. 1927.
BANK OF FINDLAND. — *Year book* 1928.
BANTA M. ARTHUR and L. A. BROWN. — *Control of sex in Cladorera*. « Pysiological Zoology », n. 1, Vol. II, January 1929.
ID. — *Sex control in a daphnid*. « Science », December 28, 1929, Vol. LXVIII.
BARRY and F. FREUD. — *The advantages of growing soya bearn in Ireland*. 1928.
ANNIE BESANT. — *Indice : a nation*. London 1929.

BIRTH, STILLBRITH AND INFANT MORTALITY STATISTICS : 1925. Part. II.

BOMBAY (Labour Office). — *Report on an enquiry into working class family budgets in Ahmedabad.* Bombay, 1928.

BRIEGER G. FRIEDRICH and A. Y. MANGELSDORF. — *Linkage between a flower color factor and self-sterility factors.* « National Academy of Sciences », Vol. 12, April 1926.

BRINK R. A. — *The physiology of Pollen.* « American Journal of Botany », Vol. XI, n. 4, 5, 6, 7, 1924.

BULLOCH W. — *The reparation of catgut for surgical use.* « Medical Research Council ». 1929.

BURGESS W. L. and TULLOCH. — *Diagnostic value of the « Vaccina variola ». « Flocculation test ».* « Medical Research Council ». London, 1929.

BUTLER MURRAY NICOLAS. — *Concerning patriotism.* June, 1929.

CAIRNS HUGH. — *A study of intercranial surgery* (Medical Research Council). London, 1929.

CALLES PLUTARCO ELIAS. — *Mexico before the world.* New York, 1927.

DOMINION OF CANADA (Bureau of Statistics). — *Origin, birthplace, nationality and language of the canadian people.* Ottawa, 1929.

ID. — *Year book,* 1929.

ID. — *Report of the department of Mines for the fiscal year ending march* 31, 1928.

ID. — *Census of Canada* 1870-71.

CANCE MAC and R. D. LAURENCE. — *The carbohydrate content of foods.* « Medical Research Council ». 1929.

CARNEGIE ENDOUMENT FOR INTERNATIONAL PEACE. — *David Kinley. Preliminary economic studies of the war. Economic effects of the war upon women and children in Great Britain.* New York, 1918.

CHALUPNY EMANUEL. — *Concerning biology, sociology and psycology in the system of sciences.*

CHRISTOFF M. — *Cytological studies in the genus nicotiana.* « Genetics ». May 1928.

CLARE NORTH CECIL. — *The sociological implications of Ricardo's Economics.* Chicago, 1928.

COLEBROOK DORA. — *Irradiation and Health.* « Medical Research Council », London, 1929.

COLLEGE OF ENGINEERING AND TECHNOLOGY BENGAL. — *Rules and programm of studies.*

CONWAY ZIRKLE. — *The effect of hydrogenion concentration upon the fixation image of various salts of Chromum.* « Protoplasma », 1928, n. 2.

ID. — *The growth and development of plastids in lunularia vulgaris, elodea canadensis and zea mays.* « American Journal of Botany », Vol. XIV, October 1927.

COST OF LIVING STUDIES. — *University of California Publications in Economics.* Vol. 5, n. 2, 1928.

CUNNINGHAM D. D. — *The path towards knowledge discourses on some difficulties of the days.* London, 1891.

DANSON J. T. — *A contribution towards an investigation of the changes wich have taken place in the condition of the people of the United Kingdom during*

the 8 years extending from the harvest of 1839 to the harvest of 1847. London 1848.

DAVENPORT C. B. — *Crime, Heredity and environment.* « Journal of heredity». Vol. XIX, n. 7, July 1928.

ID. — *Department of genetics. General statement.* December 1928.

DAVIS S. JOSEPH. — *The farm export detenture plan.* « Food Research Institute ». 1929.

DICKINSON. — *Sterilization without unsexing.* « Journal of the American Medical Association », February 2, 1929, Vol. 92.

DONTCHO ROSTOFF. — *Induced immunity in plants.* « National Academy of Sciences » March. 1928.

ID. — *Pollen-tube growth in lythrum salicana.* « Natural Academy of Sciences », n. 4 April 1927.

DOUBLIN LOUIS. — *Mortality statistics of insured wage earnes and their families.* New York, 1919.

ID. — *Anthropometric and mortality tables for overweights.* New York 1925.

DUNN HALBERT L. — *Application of statistical methods in physiology.* « Physiological Reviews », Vol. IV, n. 2, April 1929.

ID. — *Arch Mechanics of the normal foot.* « The American Journal of Hygiene », Vol. VIII, n. 3, May 1928.

ID. — *A record system suitable for both clinical and statistical medecine.* « Archives of Internal Medecine », April 1928, Vol. 41.

ID. — *Variability in the growth of the fetal central nervous system as measured by biometric constants.* « The Journal of Comparative neurology », Vol. 42, n. 2, December 1926.

DURHAM A. M. — *Toxicity tests for Novarsenobenzene.* « Medical Research Council », 1929.

EAST E. M. — *A genetics comes of Age.* « Journal of heredity », Vol. XIII, n. 5, 1922.

ID. — *A new interpretation of the hereditary behavior of self-sterile plants.* Reprinted « National Academy of Sciences », Vol. II, n. 2, February 1925.

ID. — *A study of partial sterility in certain hybrids.* « Genetics 311-365 », July 1921.

ID. — *Genetical aspects of self and cross-sterility.* « American journal of Botany » 468-473, 1923.

ID. — *Genetics studies on the protein content of maiz.* « Genetics » 5 : 543-610, November 1920.

ID. — *Heredity in the genus fragaria with special reference to the false hyhidis of millardet.* « Bussey Institution of Harvard University ».

ID. — *Inheritance of trimorphism in Lythrum salicana.* « National Academy of Sciences », Vol. 13 March, 1927.

ID. — *Mendel and his contemporaries.* « The scientific Monthly », Vol. XVI, n. 3. March, 1923.

ID. — *Round tip tobacco a plant « Made to order ».*

ID. — *Studies on self-sterility. Heredity and selective pollen-tube growth.* « Genetics ». September, 1926.

ID. — *The inheritance of Heterostyly in Lythrum salicana.* « Genetics », September 1927.

EAST E. M. — *The genetics of the genus nicotiana.* « Bibliografia genetica », 1928.

ID. — *The genetics of trimorphism in Lythrum salicana.* « Bussey Institution of Harvard University ».

ID. — *The genetics and physiology of self-sterility in nicotiana.* New York, 1927.

GERIG G. — *The principle of egual economic opportunity before and since the establishment of the mandates system.* « University of Illinois », 1922.

GILL CONRAD. — *National power and prosperity.*

GLIWIC HIPOLIT. — *Poland's position among the nations.* Varsavia, 1928.

GOODALL E. W., M. GREENWOOD, T. RUSSELL. — *Scarlat fever, diphteria and enteric fever* 1895-1914. A chimical Statistical study. London, 1929.

GOSNEY E. S. and POPONOE P. — *Sterilization for human betterment.* New York, 1929.

GRAHAM L. K. — *Science and medical teaching.* « Science », Vol. XLVIII, n. 1252.

ID. — *Scientific medicine yeasterday and to morrow.* « The Journal of the american medical association », Vol. 73, July 1919.

ID. — *Theodore Caldwell Janeway.* — « The American Journal of the medical Sciences », February 1918.

GRANCER FRANKER. — *The contribution of pragmatism to the history of philosophy.*

GREENWOOD M. — *Sydenham as an Epidemiologist.* « Proceedings of the Royal Society of Medecine », 1919 Vol. XII. London, 1919.

HAIDER CARMEN. — *Capital and labor under fascism.* Columbia University.

HALL RAY. — *The balance of international payments of the United States in* 1928. Depart. of Commerce. Washington, 1929.

HARRISON E. J. — *Lithuania* 1928.

HARRISON W. L. — *The treatment of syphilis.* London. Medical Research Council 1929.

HARRY JEROME. — *Migration and business Cycles.* New York, 1926.

HARVARD ECONOMIC SOCIETY. — *Second Annual Report of the President.* Cambridge, Massachussetts. 1929.

FREIDRICH L. HOFFMANN. — *Deaths from lead poisoning.* 1925-1927.

THE HUMAN BETTERMENT FOUNDATION. — *Sterilization for Human Betterment.* Pasdena California.

HUNGARY. — *View of Trianon's Hungary.*

ICHIJIMA K. — *Cytological and genetic studies in pagaria.* « Genetics » 11. November 1926.

INTERIM REPORT OF THE PROCEEDINGS OF THE FIRST GENERAL ASSEMBLY OF THE INTERNATIONAL UNION FOR THE SCIENTIFIC INVESTIGATION OF POPULATIONS PROBLEMS. (Reprinted from the journal of the « American Statistical Association ». September 1928.

INTERNATIONAL COTTON STATISTICS. — *Consumption of Cotton half-year ending* 31*st July* 1929.

INTERNATIONAL MIGRATIONS. — *Publications of the national Bureau of Economic Research incorporated.*

INTERNATIONAL ECONOMIC CONFERENCE OF GENOA. — *Second plenary session provisional verbatim record.* May 1922.

IRWING J. O. — *Note on the X test for goodness of fit.* « Journal of the Royal Statistical Society », Vol. XCII. Part. II, 1929.

ID. — *On the frequency distribution of any number of deviates from the mean of a sample from a normal population and the partial correlations between them.* « Journal of the Royal Statistical Society », Vol. XCII, Part. IV, 1929.

ID. — *The physiology of self-sterility in plants.* « The Journal of General Physiology », June 20, 1926.

EDEN T. and R. A. FISHER. — *Studies in crop variations.* « Journal of Agricultural Science », Vol. IX, part. II, 12 April 1929.

EDGEWORTH F. Y. — *Entomological statistics.* « Metron », Vol. I, n. 1.

EMMET J. SCOTT. — *Negro migration during the war.* New York, 1920.

ENCYCLOPAEDIA OF THE SOCIAL SCIENCES. — *Report of the progress.* New York 1928.

ESTONIAN YEAR BOOK. — 1929. Tallinn.

EUGENICS EDUCATION SOCIETY. — *Eight annual report* 1915-16.

EUGENJUSZ KWIATOWSKI. — *The economic progress of Poland,* 1929.

FARR WILLIAM. — *Vital Statistics.*

FIELDS J. C. — *Universities, research and brain waste.* 1920.

FISHER R. A. — *A preliminary note on the effect of sodium silicate in increasing the yeld of Barley.* « The Journal of Agriculture and Science », Vol. XIX, 18 January 1929.

ID. — *Moments and product moments of sampling distributions.* « Proceedings of the London Mathematical Society ». Ser. 2, Vol. 30.

ID. — *Note on a new method of construction of mortality tables when the number of lives exposed to risk is unkhown.* 1925.

ID. — *On a distribution yelding the error functions of several well known statistics.* « Ind. Mathematical Congress ». Toronto, Canadà, 1924.

ID. — *Statistics and biological research.* « Nature ». August 17, 1929.

ID. — *Test of significance in harmonic analysis.* « Proceedings of the Royal Society », Vol. 125, 1929.

ID. — *The evolution of dominance, reply to professor several wright* « The american naturalist », Vol. LXIII, November-december 1929.

ID. — *The general sampling distribution of the multiple correlation coefficient.*

ID. — *The over production of food.* « The realist ». July, 1929.

ID. — *The sieve of Eratosthenes.* « Mathematical Gazette ». December 1929.

FISHER IRVING. — *Avance sheets of chapter XII from the purchasing power money.* 1910.

FISHER and FORD. — *The variability of species in the Lepidoptera, with reference to abundance and sex.* « Trans. of the Ent. Society of London », January 1929.

FOOD RESEARCH INSTITUTE. — *Stanford University.* List of publications and contributions to september 1929.

FLUX A. W. — *Indices of industrial productive activity.* « Journal of the Royal Statistical Society », Vol. XC, Part. II, 1927.

FUSTEL DE COULANGE. — *The origin of property in land.* London, 1891.

FISHER and HOBLYN. — *Maximum and minimum correlation tables in comparative climatology*. Geografiska Anualer 1928.

GAINES E. F. — *Genetics of brut resistance in wheat*. « Journal of the Agricultural Research », Vol. XXIII, n. 6, 1923.

GALTON FRANCIS and OTHERS. — *Sociological papers*. London, 1905.

ID. — *Sociological papers*. Volume 2° e 3° published for the sociological society. London Macmillan & Co. 1906-1907.

GALVANI L. — *The new organization of the statistical services in Italy*. « American Statistical Association », September 1927.

LANGLANDS N. M. S. — *Experiments on binocular vision*. « Medical Research Council », 1929.

LASKI HAROLD J. — *Political thought in England from Locke to Bentham*. New York, 1919.

LEAGUE OF NATIONS. — *International Economic Conference. Documentation*. Geneva. May 1927.

ID. — *Provisional economic and financial committee*. Report on certain aspects on the saw material problem.

ID. — *Report of the epidemic commission of the league of nation*. Geneva, 1921.

LO FARO FRANCESCO. — *The banking system of Italy with a preliminary note on the monetary and credit system*. 1929.

LOTKA L. ALFRED. — *Families of curves of pursuit and their isochrones*. The American Mathematical Monthly, Vol. XXXV, n. 8, October 1928.

ID. — *Our growing leisure*. « Outlook and Independent ». July 26, 1929.

LOVEDAY A. M. A. — *The measurements of tarif levels*. « Journal of Royal Statistical Society », Vol. XCII, part. IV, 1929.

LOWELL REED J. — *Fitting straight lines*. « Industrie grafiche italiane », 1921. Rovigo.

LYTHGOE R. J. and TANSLEY K. — *The adaptation of the Eye: its relation to the critical frequency of Flicker*. « Medical Research Council ». 1929.

MAC DONALD ARTHUR. — *Scots and scottish influence in Congress*. « Metron », Vol. I, n. 2, 1920.

MADHAVA K. B. — *Report on the statistical analysis of the medical examinations (1924-25 to 1926-27) of students of the Mysore University*. 1928.

MANGELSDORF A. J. — *Color and sex in the indian walking stick, dixippus morosus*. « Psyche », Vol. XXXIII, n. 6, 1926.

ID. — *Origin of the garden strawberry*. « Journal of Heredity ». April 1927.

ID. — *Studies on the genetics of pagaria*. « Genetics ». July 1927.

MANGELSDORF and JONES. — *The expression of mendelian factors in the gametophyte of maize*. « Genetics ». September 1926.

MARSHALL L. — *The American Collegiate School of Business*. Chicago. 1928.

MARSHALL L. and OTHERS. — *Collegiate education for business*. « The Journal of Business ». Vol. I, January 1928, n. 1.

MARSHALL L. — *Offerings in economics in* 1925-26. « Journal of Political Economy », October 1927, n. 1, Vol. 35.

MARYLAND THIRTY-SEVENTH ANNUAL REPORT OF THE COMMISSIONER OF LABOR AND STATISTICS OF MARYLAND. — Baltimore, 1928.

MEDICAL RESEARCH COUNCIL. — *Medical Uses of radium*. Summary of reports from Research Centres for 1927. Ibidem for 1928.

MEDICAL RESEARCH COUNCIL. — *A re-determination of the trichromatic mixture data*, by W. Wright. London, 1929.

ID. — *Report of the medical Research Council fot the year* 1927-28. London, 1929.

ID. — *Studies in the Psychology of reading*. London, 1929.

MELLANBY MAY. — *Dental structure in dogs*. Diet and the teeth : an experimental study. London, 1929.

MILLS PATRICK MARY. — *Historical and psychological explanation of the Heraklitan teachings of nenesidemus*. Bologna, 1911.

MORGAN LLOYD F. — *Annual Behavior*. London, 1908.

MURRAY A. D. G. — *Medical Research Council. The Meningococcus*.

NATIONAL BUREAU OF ECONOMIC RESEARCH. — *Recent economic Change*. Vol. I, II, 1929.

NEGRO WOMEN IN INDUSTRY. — *U. S. Department of Labor*. 1922.

NEW SOUTH WALES. — *Official Year Book of New South Wales for* 1927-28.

ID. — *Statistical Register for* 1927-28. *Population, Vital Statistics and Government*.

ID. — *Statistical Register for* 1926-27.

NEW YORK STATE. — *Department of Labour*. Annual Report 1928.

ID. — *Miscellaneous Labour Laws*.

ID. — *Workmen's compensation law and industrial board rules* 1929.

NEYMAN J. — *Contribution to the theory of certain test criteria*. « Institut International de Statistique », Varsovie, 1929.

NEYMAN and E. S. PEARSON. — *On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference*. Part. II.

NEYMAN J. — *The theoretical basis of different methods of testing cereals*. Part. II.

NORTHWESTERN UNIVERSITY BUSINESS STUDIES. — *The widening retail market*. 1926.

OCCASIONAL PAPERS. — N. 2 *The press today. How the new reaches the public*. New York, 1929.

OGBURN W. — *Analysis of the standard of living in the district of Columbia in* 1916. « American Statistical Association ». June 1919.

ID. — *A study of Food costs in various cities*. « Monthly Labor Review ». August, 1919.

ID. — *A study of rents in various cities*. « Monthly Labor Review ». September 1919.

ID. — *Bias, psychoanalysis and the subjective in relation to the social sciences*. « American Sociological Society », Vol. XVII, 1922.

ID. — *The fluctuations of business of social forces*. « The Journal of social forces ». January 1923.

ID. — *The historical method in the analysis of social phenomena*. « Proceedings of the American Sociological Society ». Vol. XVI, December 1921.

ID. — *Inventions and discoveries* 1928. « American Journal of Sociology », Vol. XXXIV, n. 6, May 1929.

ID. — *The psychological basis for the economic interpretation of history*.

ID. — *Social Changes in* 1928. « The American Journal of Sociology ».

ID. — *Social changes as shown by occupation statistics*. « American Journal of Sociology », Vol. XXXIV, n. 6, May 1929.

W. Ogburn and Jaffè William. — *The economic development of post-war France a survey of production*. New York 1929.
W. Ogburn and D. S. Thomas. — *The influence of the business cycle on certain social conditions*. « American Statistical Association ». September 1922.
W. Ogburn and Ellen Winston. — *The frequency and probability of insanity*. « American Journal of Sociology », Vol. XXXIV, n. 5 March 1929.
Okakura-Yoshisaburo. — *The japanese spirit*. London, 1905.
Orr J. B. and F. Leitch. — *Iodine in nutrition*. « Medical Research Council ». London 1929.
The Outline of the present system of statistical investigation concerning agriculture, forestry and fishery in Japan. 1928.
Page A. J. — *On the annual revision of forecasting formulas based on partial regression equations*. June 1929.
Pearl, Raymond. — *Alcohol and life duration*. «International clinics». Vol. III, Series 38.
Id. — *A biological classification of the causes of death*. « Metron », Vol. I, n. 3, 1921.
R. Pearl and L. Bacon Lantimer. — *Biometrical studies in Pathology*. « Archivs of Pathology », July 1928, Vol. 6.
R. Pearl. — *Biometry and vital statistics in relation to the science of medecine*. New York, 1927.
Id. — *Cancer from the viewpoint of the human biologist*. « The international clinics ». (Vol. VIII, Series 28).
Id. — *Collected papers from the Institute for Biological Research of the Johns Hopkins University*. Vol. I, II and supplement to Vol. I.
Id. — *Evolution and mortality*. « The Quarterly Review of Biology », Vol. III, n. 2, June 1928.
Id. — *New data on alcohol and duration of life*. 1928.
Id. — *On the patological relations between cancer and tubercolosis*. « Proceedings of the society for Experimental Biology and Medecine », 1928.
Id. — *Report of the Director of the Institute for Biological research* II. 1926-27. Report of the President of the University, 1926-1927. October 1927.
Id. — *The cost of Biological Books in* 1927. « The Quarterly Review of Biology ». Vol. II, n. 4, December 1927.
Id. — *The growth of Populations*. « The Quarterly review of Biology ». Vol. II, n. 4. December 1927.
Id. — *The indigenous native population of Algeria in* 1926.
Id. — *The growth of seedlings of the exogenous food and light*. « The National Academy of Sciences ». Vol. 14, nº 1, January 1928.
Pearson Karl. — *National life from the stand-point of science*. London, 1921.
Phadke N. S. — *Sex problem in India*. Bombay, 1927.
Phee Mac. — *Meiotic cytokinesis of cannabis*. « Reprinted for private circulation from the Botanical Gazette ». Vol. LXXVIII, n. 3, November 1924.
Id. — *The influence of environnement on sex in hemp cannabis sabiva L*. « Journal of agricultural research ». Vol. XXVIII, n. 11, June 1924.
Pigou A. C. — *The economics of welfare*. London, 1924.
Id. — *Greenwood, Webb, Zimmern. — The riorganisation of industry*. Oxford.

POPONOE PAUL. — *A roman catholic view of sterilization.*

ID. — *A study of patients coming to California State Institutions for Sterilization only.* 1929.

ID. — *Effect of salpingectomy on the sexual life.* « Eugenics », Vol. I, n. 2, November 1928.

ID. — *Effect of vasectomy out the sexual life.* « Journal of abnormal and social psychology », Vol. XXIV, n. 3, October-december 1929.

ID. — *Menstruation and salpingectomy among the feeble-minded.* « The Pedagogical and Journal of Genetic Psychology », 1928.

ID. — *Marriage after eugenic sterilization. Proceedings of the fifth-second annual session of the American Association for the study of the feeble-minded.* May-june 1928.

ID. — *The Number of Persons needing sterilization.* « Journal of Heredity ». Vol. XIX, n. 9, September 1928.

ID. — *Sterilization and criminality.*

J. P. PRINGLE. — *The Merxplas Beggar Colony. An experiment in applied eugenics.*

PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL MATHEMATICAL CONGRESS. Toronto, 1924.

PULLERITIS ALBERT. — *The Estonian year book* 1929 *Talliin.*

RAGNAR FRISCH. — *Changing harmonies and other general types of components in empirical series.* Extracted from the Skandinavisk Aktuarietidskrift 1928. Uppsala.

RAMON and ILLINGWORTH HELIE. — *Diphteria Prophylaxis in France experiments with anatoxin vaccination.*

REPORT OF THE NATIONAL COUNCIL OF EDUCATION. — *Bengal* 1929.

RECENT ECONOMIC CHANGES IN THE UNITED STATES. — Vol. I and Vol. II. 1929.

RICHEMOND MAGO SMITH. — *Emigration and immigration.* London, 1890.

RIDER PAUL R. — *Moments of moments.* National Academy of Sciences. Vol. 15, n. 5. May 1929.

RIVERS R. H. — *Instinct and the unconscious ; a contribution to a biological theory of the psycho-neuroses.* Cambridge, 1922.

ROBERTSON D. H. — *Money.* London, 1926.

ROWENTREE. — *Poverty. A study of town life.* London, 1902.

ROYAL COMMISSION ON AGRICULTURAL IN INDIA. — *Report.* Calcutta, 1928.

RUGGLES GATES. — *A botanist in the amazon valley.*

ID. — *Bloods groups of canadian indians and eskimos.* « American journal of Physical Anthropology ». Vol. XII, n. 3, January-march 1929.

ID. — *Inter-Racial Inheritance in Man.*

ID. — *Species and chromosomes.* « The American Naturalist ». Vol. LIX, May-june 1925.

ID. — *Triplets in a relatively homozygous family.* « Journal of heredity ». Vol. XX, n. 5, May 1929.

RUSSEL DOROTHY. — *A classification of bright's disease.* « Medical Research Council ». 1929.

RUTHERFORD GROVES E. and W. FIELDING OGBURN. — *American marriage and family relationships.* New York 1928.

SALAMAN MYER. — *Some experiments on peripherical vision.* London, 1929.
SARKAR KUMAR BENOY. — *Bengal National Chamber of Commerce.* Vol. III, n. 1.
ID. — *Industrial methods and commercial policies in modern economics development* (1870-1927). « Journal of the Bengal national Chamber of Commerce ». March, 1928.
SANDERS THOMAS HENRY. — *Problems in industrial accounting.* Chicago, 1923.
SARGANT FLORENCE PHILIP. — *Use of factory statistics in the investigations of industrial fatigue.* Columbia University, 1928.
SAX KARL. — *Sterility in weasel hybrids. II Chromosome Behavior in partially sterile hybrids.* « Genetics » 513-552, November 1922.
ID. — *III. Endosperm Development and F2 Fertility.* « Genetics » 553-558, November 1922.
SCHULTZ HENRY. — *Discussion.* Proceeding of the American Statistica Association. March 1929.
ID. — *Marginal productivity and the general pricing process.* « Journal of political economy », Vol. XXXVII, n. 5, October 1929.
SEBESS DENNIS. — *Landownership policy of new Roumanian in Transylvania.* Budapest 1921.
SEEBOHM ROWENTREE. — *Poverty. A study of town life.* London 1922.
SELIGMAN R. A. EDWIN. — *The economics of instalment selling.* New York 1927.
ID. — *Essays in taxation.* 1905, Columbia University.
SKUIENIEKS M. — *Latvija* 1918-1928. Gados, Riga, 1928.
SMITH F. G. — *Education for business in Great Britain.* « The Journal of political economy », Vol. 36, February 1928, n. 1.
SMITH CHARLES DENVENT. — *Natural Monopolies in relation to social democracy.* London, 1929.
SPENCER HERBERT. — *The data of Ethics.* London, 1907.
ID. — *Political Institutions, being part V on the principles of sociology.* London, 1885.
SPENCER MALCOM. — *Social degradation.* London, 1908.
SPILLER. — *Paper on inter racial problems. Communicated to the first Universal races congress held at the University of London.* July, 1911.
STANLEY LEE GERALD. — *Inspired millionaries.* London, 1928.
STAMP J. C. — *The effect of trade fluctuations upon profits.* « Journal of the Royal Statistical Society », Vol. LXXXI, Part. IV, July 1918.
STARZYNSKY STEFAN. — *The financial situation of Poland in* 1927. Varsavia, 1928.
STATISTICAL ABSTRACT OF THE MINISTRY OF AGRICULTURE AND FORESTRY.' — 1926.
STERILIZATION BILL.
STUDIES IN CROP VARIATION. — *The relation between yield and soil nutrients.* « The Journal of Agricultural Science ». Volume XVIII, Parte IV, October 1928.
THE SWEDISH STATE INSTITUTE FOR RACE BIOLOGY. — *The racial characters of the swedish nation.* Upsala, 1926.

TAUSSIG F. W. — *The tariff history.*

TEN YEARS OF SOVIET POWER IN FIGURES. 1917-1927. — *Central Statistical Board U. R. S. S.*

THE OUTLINE OF THE PRESENT SYSTEM OF STATISTICAL INVESTIGATION CONCERNING AGRICULTURE FORESTRY AND FISHERY, IN JAPAN.

TERAO ARATO. — *Growth of the lobster, homarus americanus.* « Proceedings of the society for experimental biology and medicine », 1928.

THOMSON ARTHUR. — « *Heredity* », London, F. Murray, 1908, Vol. I.

THORNTON C. FRY. — *Probability and its engineering uses.* New York, 1928.

THORSTEIN VEBLEN. — *An enquiry into the nature of peace and the terms of its perpetuation.* New York, 1917.

TRAVIS WILLIAM HOWARD. — *The influence pathology at the city hospital upon medecine in Cleveland.* « The Ohio State Medical Journal », August 1928.

UNION OF SOUTH AFRICA. — *Statistics of Production,* 1925-26.

U. S. DEPARTMENT OF AGRICULTURE. — *Yearbook of Agriculture* 1927.

ID. — *Yearbook of Agriculture* 1928.

U. S. DEPARTMENT OF COMMERCE. — *Agriculture farm statistics by color and tenure of farmer.* 1923.

ID. — *Animal and vegetable and fats oils.* 1926-27.

ID. — *U. S. Census of Agriculture* 1925.

ID. — *Commerce year book* 1927. Vol. II. Foreign countries.

ID. — *Cotton production in the United States.* Crop 1927.

ID. — *Cotton production in the United States.* Crop 1928.

ID. — *Financial statistics of cities having a population of over* 30.000. Washington 1927.

ID. — *Financial statistics of states* 1927.

ID. — *Manual of joint causes of death.* Washington, 1925.

ID. — *Marriage and divorce.* 1927.

ID. — *Mortality statistics* : 1925. Part. II.

ID. — *Stocks of leaf tobacco* 1928.

U. S. DEPARTMENT OF LABOR. — *Activities and functions of State Department of Labor* 1928.

ID. — *Bulletin No.* 467. 481. 461. 464. 471. 468. 473. 474. 476. 477. 483. 482. 484. 486. 475.

ID. — *List of psychiatric clinics for children in the U. S.* 1929.

ID. — *Maternal Mortality.* No. 158.

ID. — *Park recreation areas in the United States.* 1928.

ID. — *Proceedings of the fifteenth annual meeting of the International Association of public employment service.* 1928.

ID. — *Settlement for accidents to American seamen.* October 1928.

ID. — *Wages and hours of Labor in woolen and worsted goods manufacturing.* 1910 to 1928.

U. S. THE MEDICAL DEPARTMENT. — *Volume XV, Statistics, Washington* 1921.

U. S. WAR DEPARTMENT. — *Defects found in drafted men.* Statistical information. 1920.

R. USSHER. — *Neo malthusianism an enquiry into that system with regard to its economy and mortality.* London, 1898.

VENN JOHN. — *The logic of Change*. London, 1888.
VINOGRADOFF PAUL. — *Villanage in England*. Oxford, 1892.
WEBSTER. — *General history of commerce*. London, 1903.
WILSON W. C. — *The tannic acid treatment of burns*. « Medical Research Council ». London, 1929.
WISHART J. — *A problem in combinatorial analysis giving the distribution of certain moment statistics*. « Proceedings of the London Mathematical Society ». Serie 2, Vol. 29, Parts 4 and 5, 1928.
ID. — *From Biometrika, a Journal for the statistical study of Biological problems*. Vol. XX, parts 1 and 2, July 1928.
ID. — *The generalised product moment distribution in samples from a normal multivariate population*. Cambridge, 1928.
ID. — *Sampling errors in the theory of two factors*. « The British Journal of psychology ». Vol. XIX, Part 2, October 1928.
WISHART and CLAPHAM. — *A study in sampling thecnique : the effect of artificial fertilisers on the yield of potatoes*. « Journal of Agricultural Sciences ». Vol. XIX, Part IV, 1929.
ID. — *Fertiliser trials on the ordinary farm*. « Journal of the Ministry of Apiculture », September 1929.
ID. — *Sampling errors in the theory of two factors*. The british Journal of Psychology (General Section). Vol. XIX, Part 2, October 1928.
ID. — *The correlation between product noments of any order in samples from a normal population*. « Proceedings of the Royal Society of Edinburgh ». 1928-29.
WRIGHT R. R. — *The Negro in Pennsylvania*.
WYLER E. J. — *The Wassermann test*. « Medical Research Council ». London 1929.
ZORN JOHN. — *I loughts on a capital levy*. London.

ALLGEMEINES STATISTISCHES ARCHIV. — Jena, 1927.
ANDERSON OSKAR. — *Zur Problematik der empirischstatistischen konjunkturforschung*.
Ausgaben und Einnahmen der Bezirksvertretungen im Königreiche Böhmen in den Jahren 1900 bis 1909.
Dr. BECKERAT ERWIN. — *Wesen und Werden des fascistischen Staates*. Berlin 1927.
BEMERKUNGEN *zur der ungarischen Wirtschaft*.
BERCZELLER und P. FRANKFURTER. — *Arbeiten auf dem Gebiete der biologichen Statistik*.
ID. — *Das ernährungsphysiologische Laboratorium in Wien*.
ID. — *Die Bedeutung der Soja für die Volksernährung*.
ID. — *Zur Geschichte der Einführung neuer Nahrungsmittel*.
BERNSTEIN FELIX. — *Variations und Erblichkeitstatistik*. Berlin, 1929.
BREISCKY WALTER. — *Die Weltlage der Statistik*. Wien, 1930.
BRIEGER FRIEDRICH. — *Ueber genetische Pseudofertilität bei der selbsterilen nicotiana*. Sandeare Lost. Biologischen Zentralblatt, Februar, 1927.
BUMM I. — *Deutschlands Gesundheitsverhältnisse unter dem Einfluss des Weltkrieges*, 1929. Stuttgart, Berlin und Leipzig.

BURGDÖRFER FRIEDRICH. — *Der Geburtenrückgang und die Zukunft des deutschen Volkes* 1928. Berlin.

ID. — *Bevölkerungstatistik.* Estr. Sonderabdruck aus Handwörterbuch der Staatswissenchaften, 1928.

CASSEL GUSTAV. — *Das Geldproblem der Velt.* München, 1921.

CZUBER E. — *Ueber Funktionen von Variablen zwischen welchen Korrelationen stehen.* « Metron », Vol. I, n. 1, 1920.

DAS ARMENWESEN IM KÖNIGREICHE BÖHMEN. — « Mitteilungen des Statistischen Landesamtes », 1908.

DEUTSCHLANDS WIRTSCHAFTLICHE ENTWICKLUNG IM ERSTEN HALBJAHR 1929.

DIE LAGE DER VERARBEITENDEN INDUSTRIE IM LICHTE DER LEIPZIGEN FRÜHJAHRSMESSE 1929.

DIE WIRTSCHAFT DES AUSLANDES 1910-1927.

DIE WOHNHAUSANLAGE DER GEMEINDE WIEN 1924-25; 1925-29.

FECHNER GUSTAV. — *Kollektivmasslehre.* Leipzig, 1897, Vol. I, pag. 483.

J. FEIG. — *Statistik der Arbeitsunfälle.* Institut Int. de Stat. Varsovie, 1929

IMRE FERENCZI. — *Die Wanderungstatistik und die Internationale Arbeitsorganisation.* « Allgemeines Statistisches Archiv ».

FISCHER GUSTAV. — *Neuere Literatur aus dem Verlag. Geld-Währung-Kredit.* Jena.

FISCHER EUGEN. — *Das Kaiser Willhelms Institut,* ecc.

ID. — *Strahlenbehandlung und Nachkommenschaft,* 1929.

ID. — *Zur Frage einer äthiopischen Rasse.* Berlin.

ID. — *Eine neue Haarfarbentafel.*

FRANKFURTER P. — *Die Korrelation zwischen Kalorien und Konsumeinheitenzahl bei den Familien der wiener Haushaltungstatistik vom Jahre* 1913. (Arbeiten auf dem Gebiete der biologischen Statistik).

ID. — *Die Verwendung des Berczeller'schen Sojamehles für die Brotbereitung.*

ID. — *Die Aufgaben der Sozialpolitik bei der Einführung des Sojamehles.*

FUNK J. — *Wandlungen in den grundlegen den Wirtschaftszweigen Danzigs seit der Begründung der Freien Stadt.* 1927.

GERO WILHELM. — *Die Bedeutung des Berczeller'schen Sojamehles für die Nahrungsmittelindustrie.*

GUMBEL E. J. — *Kleine Mitteilungen.*

HANNEWALD EDGARD. — 1000 *Jahre Brandenburg.*

HARMS BERNHARD. — *Das Institut für Welwirtschaft und Seeverkehr an der Universität Kiel.*

HISTORISCH-STATISTISCHE AUSTELLUNG. — Wien, 1913.

INDUSTRIELLE PRODUKTIONSSTATISTIK. — Jahr 1928.

INSOLERA FILADELFO. — *Rente und Kapitalansammlung.*

INSTITUT FÜR KONJUNKTURFORSCHUNG. — *Die Lage der verarbeitenden Industrie im Lichte der Leipziger Herbstmesse* 1928. Berlin.

LEIBHOLZ GERHARD. — *Zu den Problemen des fascistischen Verfassungsrechts.* Berlin und Leipzig, 1928.

LENZ F. — *Die bevölkerungspolitische Lage und das Gebot der Stunde.* « Archiv für Rassen » etc., B. 21, H. 3, 1929.

LENZ F. — *Der Fall Kammerer und seine Umfilmung durch Lunatschrasky.* « Archiv für Rasse », etc. Bd. 21, H. 2, 1929.

LOW FRITZ. — *Zum Problem der Uebervölkerung.*

MICHELS ROBERT. — *Die Kritik der Handelsbilanztheorie bei Gian-Rinaldo Carli* (1769). « Weltvirtschaftliches Archiv », 29 Band. April 1929, Heft 2.

ID. — *Grundzüge der Deutschkunde.*

MISES LUDWIG. — *Theorie des Geldes und der Umlaufsmittel.* München, 1912.

MORGENROTH WILHELM. — *Bewegung und Gliederung der Bevölkerung nach dem Kriege und Folgerungen für die Politik und Verwaltung der Gemeinden.* Dezember, 1928.

ID. — *Münchens Kinderreiche Familien und ihre Wohnungen.*

OTMAR VON VERSCHUER FRHR. — *Die Variabilität des menschlichen Körpers an Hand von Wachstumsstudien an eine und zweieigen Zwillingen.*

RÉDIADIS PÉRICLÈS. — *Theoretische Finanzwissenschaft.* Athen, 1927.

RICHTER F. A. — *Das Berczeller'sche Sojamehl von bäckereitechnischen Standpunkte.* II Teil : Milchbrot, Geback : Zuckerbäckereren.

ROESLE E. — *Die Präfutilität und Sterblichkeit der ledigen Frauen nach dem Kriege.* « Deutsche medizinische Wochenschrift », N. 25, 1929.

ID. — *Grundlagen zur Krankenkassen-statistik.* « Soziale Medizin », N. 5-6, 1928.

ID. — *Kritische Besprechungen.* Leipzig, 1914.

ID. — *Zum Fo. Geburtstage von Friedrich Prinzing.*

SAVORGNAN FRANCO. — *L. Gumplowicz Sozialphilosophie in Unriss.* Da « Scientia », Vol. VIII, Anno IV (1910).

ID. — T. SOMLÓ. — *Der Güterverkehr in der Urgesellschaft.* « Scientia », Vol. IX, Anno X, N. XVIII, 2.

SEEBER A. — *Sozialökonomie und Sojamehl.*

SCHÖNROD LUDWIG. — *Der deutsche Büchermarkt in Jahre* 1928.

SCHWARZ ARNOLD. — *Die Entwicklung des Maschinenwesens und die Frauenarbeit.* Berne 1929.

STAEHLE HANS. — *Die Analyse von Nachfragekurven in ihrer Bedeutung für die Konjunturforschung.*

STATISTISCH ADMINISTRATIVES JAHRBUCH DER HAUPT UND RESIDENZSTADT BUDAPEST. Anno 1929.

STATISTISCHES HANDBUCH FÜR DIE REPUBLIK OESTERREICH. — Wien 1928, und 1929.

STATISTISCHES JAHRBUCH FÜR DAS DEUTSCHE REICH. — 1929.

STATISTISCHES JAHRBUCH FÜR DEN FREISTAAT SACHSEN. — (1927-28).

STATISTISCHES JAHRBUCH DER STADT BERLIN. — 1929.

STATISTISCHES JAHRBUCH FÜR DEN FREISTAAT PREUSSEN. 25 Band, 1929.

STATISTISCHES JAHRBUCH DER ERWERBS UND WIRTSCHAFTS-GENOSSENSCHAFTEN IM KONIGREICHE BÖHMEN. 1907-1908.

STEPANOFF V. — *Apparate zum Darstellen von veränderlichen Diagrammen nach dem System von Victor Stepanoff.* Berlin, 1928.

SZANTO JOSEF. — *Das Sojamehl in der Diät der Zuckerkranken.*

UNIVERSITÄT ZU BERLIN — *Verzeichnis der Vorlesungen, Sommersemester* 1929.

VERSCHUER O. — *Sozialpolitik und Rassenhygiene.*

ID. — *Zur Bestimmung des Anteils von Erbanlage und Umwelt an der Variabilität.*

VERSCHUER O. v. — *Die Ahulichkeitsdiagnose der Eineiigkeit von Zwillingen.*
ID. — *Die Konstitutionsforschung im Lichte der Vererbungswissenschaft.* « Klinische Wochenschrift », 23 april 1929, N. 17.
WAGEMANN ERNST. — *Einfürhrung in die Konjunkturlehre.* Leipzig, 1929.
WAINSTEIN L. — *Meteorologische und wirtschafliche Zykle Probleme der Wirtschaftsprognose.* « Wierteljahrshefte zur Konjunkturforschungs ».
WASTL H. — *Das haltbare Sojamehl.*
ID. — *Das Sojamehl als Nahrungsmittel.* « Wiener Medizinischen Wochenschrift », N. 41, 1926.
WEINBERG W. — *Metodologische Gesichtspunkte für die statistische Untersuchung der Vererbung bei Dementia praecox.* Rovigo, 1920.
WELTMONTANSTATISTIK. — Teil 1 und 2. Stuttgart, 1929.
WILHELM A. — *Die Neuordnung des statistischen Verwaltungsdienstes in Italien.*
WINKLER WILHELM. — *Die Statistik in Oesterreich.* Wien, 1930.
WINTER IN BAYERN. — 1928.
WÜRZBURGER. — *Die Haufigkeit der ärztlichen Beglaubigung von Todesursachen im Sachsen.* XVIII Session de l'Institut International de Statistique. Varsovie, 1929.
ID. — *Zur Entwicklung des Internationalen Statistischen Instituts.* « Deutsches Statistiches Zentralblatt », 1929, N. 9-10.
F. ZAHN. — *Statistik des Franenerwerbs.*
ID. — *Internationale Wanderungsstatistik.*
ID. — *Zur Frage der Fremdenverkehrsstatistik.* (Institut International de Statistique, Varsovie, 1929).
ZIZEK FRANZ. — *Die Statistischen Einheiten.* « Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik », 131 Band, III Folge, Band 76.
ID. — *Gleichartigkeit, Homogenität und Gleichwertigkeit in der Statistik.*
ZÜRICHS. — *Bevölkerung seit* 1400. — 1929.
ZÜRCHER STEUERSTATISTIK. — 1921.

ASBRINK GUSTAV. — *Ein Buch über Schweden.* Stockolm, 1926.
ANUARUL STATISTIC AL ROMANIEI 1928. — Bucarest, 1928.
BANCO DE LA NACIÓN ARGENTINA. — *Memoria y balance General del esercizio* 1928.
BOJORGUEZ JUAN D. — *Orientaciones de la Estadistica en Mexico.* 1929.
BRASIL. — *Archivos de Hygiene.* Maio de 1929 e setembro de 1929.
ID. — *Annuario Demographico* 1926. São Paulo.
ID. — *Annuario Demographico* 1924.
EDELÉNYI-SZABO DENES. — *Magyarorszag Közjogi,* etc. Budapest, 1928.
GALITZIN Principe B. — *Conferencias sobra sismometria.* Madrid, 1921.
GOMEZ NUNEZ SEVERO. — *La guerra Hispano-americana. La Habana, Influencia de las plazas de guerra.* Madrid, 1900.
ID. — *La guerra Hispano-americana. Puerto-Rico y Filipinas.* Madrid, 1902.
ID. — *La guerra Hispano-americana. Santiago de Cuba.* Madrid, 1901.
GONZALES GALÉ JOSÉ. — *Jubilaciones y seguro social.*
ID. — *La XVII sección del Istituto Internacional de Estadistica.* Vol. I, n. III. Buenos Aires, 1928.

JAARCIJFERS VOOR NEDERLAND 1928. — St. Gravenhage.

KAZIMIERZ MOSZYNSKI. — *Kultura Ludowa Slowian.* Krakow, 1929.

KRESSER MILAN. — *Prilory teoriji statistiskih zakona.* Dionicka Tiskara. Zagrebu, 1913.

MINISTERO DE JUSTICIA E INSTRUCCIÓN PUBLICA. REPUBLICA ARGENTINA. — *Estadistica* 1925. Buenos Aires, 1926.

MINISTERO DE TRABAJO Y PREVISIÓN. — *Anuario estadistico de España* 1927.

ID. — *Estadistica de las huelgas. Memoria corrispondente a los años* 1927 *y* 28. Madrid, 1929.

ID. — *Movimento de la población de España Años* 1924-25-26. Madrid, 1929.

NAJNONSZY. — *Plan Krakowa.*

NEDERLANDSCHE CONJUNCTUURLIJINEN (Courbes relatives à la situation économique des Pays-Bas). *Quelques courbes relatives à la situation de l'industrie du cacao et du chocolat.*

NEURDENBURG M. G. — *Doodsoorzaak en statistiek.*

NORGES OFFICIELLE STATISTIKK. — *Vol. VIII,* 1929, *N.* 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 105, 106.

PERNAMBUCO. — *Annuario Estadistico.* Anno II, 1928.

POLONIA. — *Zwiazek polskich hut zelaznych.* Warsawia, 1928.

REPUBLICA DE COLOMBIA. — *Censo de Población* 1918-19. Bogota, 1924.

REPUBLICA DE COSTA RICA. — *Informe de la dirección general de estadistica. Año* 1928.

RIQUEZA Y EL PROGRESO DE ESPAÑA. — *Editado por el Banco Urguijo de Madrid* 1920.

M. SKIJENIEKS. — *Latvija Starp Eiropas Valstin.* Riga, 1929.

STATISTIEK VAN NEDERLAND. — *Overzicht van den omvang der vakbeweging op.* 1. *January* 1929.

ID. — *Statistiek van de sterfte naar den Luftijd en de oorzaken van den dood.* Jarr. 1928.

ID. — *Statistiek van den loop der Bevolking van Nederland.* Over het Jear 1928.

STATISTIK ARBOK FOR KONGERIKET NORGE. — 1928.

SVERIGE VARNUTFORSEL TELL OLIKA LÄNDER. — ÄR 1928.

SVERIGE VARUINFORSEL FRÄNOLIKA LÄNDER ÄR 1928. — Stockolm 1929.

TIOARSBERATTELSE ANGAENDE UTSTÄLLNINGENS FOR ARBETARSKYDD OCH-VÄLFAÏD VEIKSAMHET AI 1910-1919. Helsingfors 1920.

Prof. CORRADO GINI, *Direttore responsabile.*

Roma — «L'Universale» Tipografia Poliglotta.

ERRATA-CORRIGE

Nel N° 3 del 28-II-1930,

a pag.:	*invece di:*	*leggere:*
63, lin. 17-18	. . . tutti i caratteri . . .	. . . tutto il carattere . . .
65, lin. 2	. . . all caracters . . .	. . . the whole character . . .